RR - 2023 - 13 - 737 호

대학수학 AI 학습시스템 구축을 위한 개념구조 연구

2023. 12.

한국대학교육협의회
Korean Council for University Education

RR - 2023 - 13 - 737 호

대학수학 AI 학습시스템 구축을 위한 개념구조 연구

연구책임자 : 정두섭(숭실대학교)
공동연구자 : 이종규(숭실대학교)

한국대학교육협의회
Korean Council for University Education

이 연구는 2023년도 한국대학교육협의회의‘대학수학 AI 학습시스템 구축을 위한 개념구조 연구’에 관한 정책연구비 지원에 의해 수행된 것입니다.
본 연구에 제시된 정책대안이나 의견 등은 한국대학교육협의회의 공식적인 의견이 아닌 연구진의 견해임을 밝혀 둡니다.
『This work was funded by 2023 Korean Council for University Education』

연구결과 요약

Ⅰ. 서론

미적분학은 대학수학 중 가장 기본이 되는 과정이자 가장 많은 학생들이 수강하게 되는 필수적인 과정이다. 따라서 대학 미적분학의 학습시스템을 구축하는 것은 대학생의 전공 연관 이해도와 더불어 대한민국의 성인 교육에 요구되는 역량을 기르는 과업으로 그 필요성이 대두된다.

Ⅱ.대학수학 AI 학습시스템 구축을 위한 개념구조 연구

본 연구에서는 현시대 대한민국 교육이 직면한 여러 과제 중 대학 수학교육의 역할과 필요성에 대해 점검하고, 이에 대한 해결책으로서 개념의 구조를 분류하고 이에 대한 개념 요소를 식별하도록 한다. 이 과정에서 대학 미적분학의 개념요소를 기존의 학교수학의 개념들과 연결하여 보다 유기적이고 위계성을 갖춘 개념 구조의 지도를 작성하여 대학수학 AI 학습시스템 구축을 위한 개념구조를 개발하여 제시하였다. 종합적으로 본 연구에서는 대학 미적분학을 총 4개의 대단원, 15개의 중단원, 109개의 소단원으로 구분해, 미적분학의 자체적인 개념은 212개와 고등학교 학교수학과 연결된 개념은 122개로 이루어진 총 334개의 개념으로 이루어진 개념 구조의 지도를 작성하였다. 이와 같은 개념 구조는 다음과 같은 의미를 가질 수 있다. 첫째, 개별 문항에 고유한 특성으로서 개념을 태깅함으로써 학생들의 취약 개념을 쉽게 파악할 수 있다. 둘째, 수학의 위계성에 의해 개념을 문항에 지정하여 학생들이 왜 이해하지 못하는지를 판정하는 평가 방법인 인지진단평가가 가능해진다. 셋째, 이런 학습시스템을 통한 신입생 미적분학 교수학습의 제공은 대학생들이 대학 미적분학을 이해하는 방식과 취약한 개념을 분석함으로써 향후의 공부에서 필요한 지식의 토대가 되는 수학적인 개념을 단순히 기계적으로 공식을 외우고 수치를 대입하는 수단이 아닌, 능동적으로 이용가능한 개념으로 받아들일 수 있도록 하는 교수학적인 의의를 가질 수 있다.

목 차

그 림 목 차

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성

요즘 서점 수학 과목 관련 코너에 가면 일부 대학에서 발간한 미적분학 교재들을 찾아볼 수 있다. 대학에서 만든 교재가 일반 서점 코너에서 발견되는 것도 새로운 모습인데, 그 내용을 잠깐만 살펴보아도 대부분 고등학교 교과과정임을 알 수 있다. 연구진의 연령대에서는 그렇게 생각되지만, 요즘 학생들에게는 그렇지 않을 수 있음을 깨닫는 데는 오래 걸리지 않았다. 그 교재 중 하나의 서문을 읽어보니, 교과과정이 바뀌면서 초월함수의 미적분을 배우지 않고도 대학에 입학할 수 있게 되거나 신입생들의 수학 과목 학력 저하로 학생들이 대학 이공계 교과목을 배우는데 많은 어려움을 겪고 있기에 교재 집필이 이루어졌다는 이야기를 보게 되었다. 이런 현상이 2023년이 지나가고 있는 현재보다 십 여 년 전부터 누적되어 왔다고 하니, 수학 전공자인 본인은 물론 연구자의 세대에서는 미래세대에 대한 걱정이 앞서게 된다는 의견이 많다. 그렇다면 과연 대학신입생의 수학 능력이 이전보다 떨어진 만큼 고3 수험생의 시험부담이 줄어들었는가? 수학을 포기하는 학생들이 많아진다는 말이 나올 때 마다 그들의 부담을 줄여주겠다고 하는 정책 결정자들의 인터뷰들이 계속 이어져 왔다. 그러나 그동안의 결과로 미루어보아 수학을 포기했다는 이른바‘수포자’는 고등학교 수학 부담을 줄이는 정책을 시행한 뒤에도 꾸준하게 늘어 왔다.

대한수학교육학회, 한국수학교육학회, 대한수학회는 ‘2022 수학과 교육과정 개정의 핵심 쟁점과 우려’라는 제목의 수학교육포럼에서 이와 같은 우려를 본격적인 쟁점으로 다룬 바 있다. 우리나라에서 지속적으로 경감시켜온 고등학교 수학교육은 학생들의 전반적인 수학적 소양의 감소를 불러왔으며, 2015개정 이후 문, 이과의 공통 부분만 가르치는 축소형으로 집행됨에 따라 수학 학습내용이 더욱 부실해졌고 특히 이공계에 진학하는 학생들의 대학수학능력이 심각하게 저하되었다는 주장이다. 한편, 대한수학교육학회와 한국수학교육학회는 ‘대한수학교육학회·한국수학교육학회 공동성명서-‘2028 대입제도 개편 시안’에 대한 전면 재검토 요구-’에서 교육 제도의 개편이 이과 계열 대학교육을 퇴보시키는 심각한 상황을 초래할 것으로 판단해, 대학 수학교육에 끼칠 지속적인 혼란과 악영향에 대한 우려를 강하게 내비쳤다. 이처럼 대학 수학교육은 국내학계의 주요한 관심사 중 하나이며,

대한민국 미래세대의 국가경쟁력과 밀접하게 관련되어 다루어져야 할 주제임을 알 수 있다.

2. 연구의 목적

수학교육과정이나 수능안이 나올 때마다 고교에서 수학을 어려워하는 학생들의 부담을 줄여줘야 한다는 주장과 대학에서 전문과정을 따라갈 수 있는 능력을 갖춰야 한다는 주장이 계속 평행선을 달려왔고 시행착오가 반복되어 왔다. 상위권 변별력을 유지한 채 학습부담을 줄이겠다고 학습범위를 축소하는 것에 대한 비판을 하고자 하면 이야기가 길어질 것 같아, 그것보다는 인공지능과 빅데이터 시대의 도래를 준비해야하는 세대에게 수학을 착실하게 가르치는 것이 중요하다는 점에는 모두가 공감한다는 점을 이 연구를 통해 강조해보고자 한다. 기본적으로 이공계 대학신입생이 되었다는 것은 수학이 어려울지언정 두려워하지는 않고 해볼만하다는 자세를 가졌다고 생각한다. 이들이 고등학교 때 이공계 대학이 요구하는 기본적인 수학실력을 갖추지 못했다면 그에 대한 문제는 차치하고, 신입생으로서 출발선에 섰는데 벡터 미적분, 기하, 행렬, 확률과 통계 등 기존 고등학교 수학Ⅱ를 착실하게 배우고 오지 못한 경우 많은 문제에 직면하게 된다. 예를 들어 보자면 이공계 대학신입생이 일반물리학을 배우면서 쓰는 수학은 기본적으로 벡터미적분이다. 고등학교 과정에 나오는 웬만한 곱셈과 나눗셈은 상당부분이 벡터를 이용한 적분과 미분으로 다시 정의 되어 있으며 그렇기 때문에 미적분은 이공계 대학생이라면 반드시 익혀야 한다. 이는 인문계 학생이 생소한 외국어과 전공에 진학하여 그 언어의 알파벳부터 배우는 것과 비슷한 이치이다. 그런데 이런 이공계의 기본 중의 기본인 벡터미적분은 앞서 말한 고등학교 수학Ⅱ에서도 배우지 않은 부분이며 새로 시작하는 과목이다. 고등학교에서 수학Ⅱ를 제대로 배우고 와도 새로 시작하는 부분에 익숙치 않을텐데, 이러한 과정을 생략하거나 건너뛰어버린 이공계 신입생들은 대학 학업 시작에 작고 낮은 벽이 아닌 크고 높은 벽에 부딪히는 것이다. 이러한 모습은 여차하면 이공계 전공을 포기하게 만드는 모습까지 보이게 된다는 것이 현재 나타나는 문제점 중 가장 심각한 부분이다. 이들은 이미 수학부담의 허들을 한 번 넘어온 학생들이기에 열의가 있다고 판단되지만 그 마저 다시 의지를 꺾는 모양새기 때문이다. 의대열풍으로 많은 이공계 영재들이 노선을 틀고 있는 형국에서 그나마 의지가 있는 이공계생들의 체질적 약화는 국가경쟁력은 물론 미래 대한민국에 엄청난 문제를 야기할 것임은 명약관화이다.

이에 늦었지만 대학수학을 공부하는 이공계신입생들을 위한 도움을 주고자 본 연구를 시작하였으며 도움을 많이 받을 수 있을 뿐 아니라 이들에게 날개를 달아 줄 수 있는 AI학습시스템을 구축하는데 밑거름이 되는 연구였으면 한다. 도움이 되고자 하는 선배의 마음으로 미적분학에서 파생되고 나눠진 개념 이해지도를 정리하였고 후속 연구 및 개발에 이 데이터를 제공하고자 한다.

3. 연구의 이론적 배경

미적분은 학생들이 대학교에 진학하기 이전 학교 수학에서 학습하게 되는 가장 어려운 수학 과목 중 하나이며, 이 과정에서 학생들은 연속과 극한, 미분과 적분 개념을 학습하게 된다. 그러나 전통적인 미적분 교육은 학생들에게 수식을 다루는 기술적인 계산과 이를 응용한 문제 해결에 초점을 맞추어, 학생들은 문제 해결과는 별개로 미분과 적분의 개념을 제대로 이해하지 못하는 경우가 많음이 알려져 있다(이현주, 류중현, 조완영, 2015; 황혜정, 김미향, 2016; Zandieh, 2000).

학교수학에서 지도하는 교수학습의 대상으로서의 미적분은 자연과학과 인공지능 분야, 공학 분야, 그리고 경제학과 사회통계학 등의 사회과학 분야에서 연속체와 변화율, 해석을 관련하여 논할 때 빠지지 않고 응용되는 중요한 개념이다. 이는 학교수학에서 다루는 일변수 미적분학에서만 국한되는 것이 아닌, 삼차원 공간 현실에서의 자연법칙과 공학계에서의 응용, 혹은 여러 변수에 따른 결과를 설명하는 사회학 등 대학 수학교육의 다변수 미적분학에 대해서도 적용되는 것이다. 해석학, 위상수학, 통계학 등의 이후에 학습하게 되는 순수수학 분야에서도 다변수 미적분의 개념은 필수적이고 기본적인 개념으로 쓰이기 때문에 수학 학습의 위계를 고려했을 때 다변수 미적분의 학습은 매우 중요하다. 또한, 공학 및 자연과학 분야와 사회과학 분야 등 순수수학 외의 분야에서 고려하는 실세계에 사용되는 수학은 대부분 여러 개의 변수로 이루어진 함수를 다루고 있다. 따라서 다변수 미적분의 개념에 대한 통찰을 학생들에게 갖추도록 하는 것은 여러 분야의 학습에 있어서도 중요한 토대가 된다(박희철, 박영자, 2008). 따라서 향후 전공에서 수학을 학습할 필요가 있는 대부분의 대학생들에게 있어 신입생 과정에서 공부하는 미적분학의 개념의 정확한 이해를 연구하는 것은 대학 수학교육의 주요한 목표가 된다고 할 수 있다(Cho, Kwon, 2023).

대학의 다변수 미적분 교육에의 문제의식에 힘입어 비교적 최근에 이르러서는 교수학습의 내용, 그래프 이미지, 다변수함수의 정의역 치역의 인식, 기울기의 표

현, 최적화 문제 해결 등에 초점을 둔 연구들이 이루어지고 있다. 또한 국제적으로 유수의 대학과 연구자들은 이런 문제의식을 공유하고 자체적으로, 혹은 기관과 협업하여 CLEAR 프로젝트(Coherent Labs to Enhance Accessible and Rigorous Calculus Instruction)[1], ULTRA 프로젝트(Upgrading Learning for Teachers in Real Analysis)[2], IOLA 프로젝트(Inquiry-Oriented Linear Algebra)[3] 등 다양한 대학 수학교육 체계화 및 강화 프로젝트에 힘을 쏟고 있다.

한편 대한민국 중고등학생들의 대표들은 IEA(International Association for the Evaluation of Educational Achievement) 주관의 TIMSS(Trends in International Mathematics and Science Study)와 OECD 주관의 PISA(Programme for International Student Assessment)의 국제평가 수학 분야에서 줄곧 최상위권의 학업성취도를 기록하였다. 그러나 상위 영재들을 제외한 일반적인 대한민국 성인 수리력 역량[4]은 이에 한참 미치지 못한다. OECD에서 지난 2008년부터 2013년까지 조사한 PIACC(Program for the International Assessment of Adult Competencies) 연구에서 우리나라 성인의 수리력 역량은 조사 대상 37개국 중 20위, 중하위권에 그치고 있다.(OECD, 2019) 쉽게 말해 고등교육을 받은 국민들의 수학에 대한 필요성 인식과 관심은 높으나 그 실력이 미치지 못한다고 분석 할 수 있다. 물리학, 화학, 공학등 미적분 개념을 사용하여 현상을 모델링하고 해석하는데 중요한 학문에 대해 전공자 레벨마저 실력부진을 드러낼 수 있는 위기상태인 현 상황이다. 인류의 오늘과 내일을 바꿀 AI 시대에서 수리력이 무엇보다 주요한 역량임은 두말 할 필요가 없으며 학교수학에서의 성취도와 성인 수리력 역량이 연결되지 않는 것은 대한민국 교육이 해결해야 할 중차대한 과제임이 분명하다. 이런 연결고리의 부재에 대한 원인은 복합적이고 다층적이며, 문제 해결의 역할에는 여러 기관의 협력과 사회 전반의 노력이 필요하지만, 무엇보다 교육기관에서 대학 수학교육이 교두보로서 더욱 강조되어야 함에는 이견이 없을 것이다.

대학의 신입생 대상 미적분학은 그런 대학수학 중 가장 기본이 되는 과정이자 가장 많은 학생들이 수강하게 되는 필수적인 과정이다. 미적분이 그 기초라는 점에서 이를 배우지 않은 학생들은 고급 교육 및 연구과제 참여에 제약이 생길 수

---

1) https://clearcalculus.okstate.edu/
2) https://sites.google.com/view/ultranalysis/
3) https://iola.math.vt.edu/
4) 일상생활에서의 다양한 수학적 요구에 적극적으로 반응하고, 이를 관리하기 위해 수학적 정보 및 아이디어에 접근하고 이를 활용·해석하며 전달할 수 있는 능력(OECD, 2019)

있다. 이에 미적분학의 학습시스템을 구축하는 것은 대학생의 전공 연관 이해도와 더불어 대한민국의 성인 교육에 요구되는 역량을 기르는 과업으로 그 필요성이 대두된다. 이를 위해 중고등학교에서 학습 시기를 놓쳤다면, 기초적인 대수학과 삼각법등의 기본 수학 개념에 대한 충분한 이해를 통해 토대를 쌓아야 한다. 이를 위해 그 핵심 개념인 (이하 대수학) 방정식과 부등식의 해, 다항식과 순수의 기본 연산, 지수와 로그와 (이하 삼각법) 직각 삼각형과 삼각비, 삼각함수의 주기와 주기성, 삼각함수의 그래프와 변형, 삼각방정식등의 개념을 이해함과 동시에 그 해를 구하는데 능숙해져야 하기에 개념도를 통한 빠른 이해를 돕고자 연구가 시작되었다.

Ⅱ. 본론

1. 연구 방법

학교 수학에서 학습한 일변수 함수에 대한 미적분 개념은 대학교 학부 신입생을 대상으로 미적분의 대상이 되는 함수를 벡터함수, 다변수 함수와 다변수 벡터함수 및 벡터장으로 함수의 층(layers)이 확장되는데, 이 과정에서 학생들은 수학적 개념의 이해에 어려움을 겪음이 여러 연구를 통해 알려져 있다(Martinez-Planell, Gaisman, & McGee, 2017; Trigueros, & Martinez-Planell, 2010; Zandieh, 2000). 다변수 미적분은 일변수 미적분의 일반화된 확장이지만, 학생들이 기존의 미적분 개념을 어떻게 다변수 미적분에서의 개념으로 연관시키는지, 어떤 지점에서 어려움을 겪는지에 대한 연구는 일변수 미적분에서의 연구에 비해 상대적으로 많지 않으며, 이를 지적하는 연구 또한 꾸준히 발표되었다(Dorko & Weber, 2014; Martinez-Planell, & Trigueros, 2021). 본 연구에서는 대학수학의 학습시스템을 구축함에 있어 이런 학습장애를 해결하기 위하여 학습 요소와 단원, 차시에 따른 개념 요소를 분류하고 도입하였다.

우선 미적분학의 각 단원의 문제에 해당 문제를 해결하는 데 필요한 개념요소들을 조합하여 태깅하고, 학생들에게 제공했을 때 틀린 문제를 분석하며 취약개념을 추출하도록 한다. 학생들은 학습시스템의 진단으로부터 본인이 어려움을 겪는 함수의 층과 이때 사용되는 개념 중 취약한 부분을 얻을 수 있다. 학습시스템에서는 얻어진 학생 개별 취약 개념이 이용되는 유사 문제를 추천하고, 수준과 난이도별 성취에 따라 연결되는 이전 층 문제를 순차적으로 제공함으로써 학생들이 학교수

학에서 배웠던 개념으로부터 대학수학의 미적분학을 연결시키고, 형성하고, 확장할 수 있도록 지도한다. 이는 수학적 일반화의 핵심적인 원리로, 학생의 개념 이해 과정을 나누어 분석하는 데 있어 효과적이며, 새로운 지식을 구성하는 주요한 수학적 사고의 요소이다(Ellis, Tillema, Lockwood, & Moore, 2022; Vygotsky, 1986).

이를 통해 학생들이 단순히 대학 미적분학 문제의 답을 계산하는 것에서 그치지 않고, 배우는 학습 요소가 기존에 학습한 일변수 미적분을 비롯한 학교수학에서의 개념과 어떤 관련성을 가지고 있는지를 파악할 수 있다. 또 이것을 어떤 과정을 거쳐서 발전시키는지를 분석함으로써 기존의 학교수학교육의 연구와 보다 쉽게 접목시킬 수 있다.

예를 들어, 벡터장에서의 스토크스 정리 문제를 계속해서 해결하지 못 하는 학생에 대해서는 학생이 대학 미적분학 과정의 문제들을 풀면서 보인 취약 개념을 분석하면 단순히 벡터장의 회전(curl)을 이해하지 못하는 것인지, 벡터장을 이해하지 못하는 것인지, 면적분 혹은 선적분을 이해하지 못하는 것인지, 한 차원 아래의 그린 정리를 이해하지 못하는 것인지, 벡터함수를 이해하지 못하는 것인지, 벡터를 이해하지 못하는 것인지, 더 나아가서는 학교수학의 미적분학의 기본정리(정적분의 기본정리)를 이해하지 못하는 것인지를 세부적으로 파악할 수 있고, 학생에게 맞는 대학 미적분학의 이전 단원 혹은 고등학교 수준에서부터 시작하는 적절한 치료 문제를 줄 수 있게 된다.

대학 미적분학의 학습 내용은 정해진 표준 교육과정이 없으며, 각각의 교재별로 서술의 정도와 단원의 배치 순서 또한 상이하다. 학습시스템에서는 일관된 순서와 위계성이 필요하기 때문에 본 연구에서는 국내를 비롯해 세계적으로 가장 많이 사용되는 대학 미적분학 교재인 Stewart(2020)의 미분적분학 교재 중 연구의 취지에 부합하도록 대부분의 대학 신입생 수업에서 쓰이는 Early Transcendentals 판[5]을 기준으로 하되, Late Transcendentals 판의 내용 요소도 도입해 단원의 학습 순서와 개념을 정하였다. 이때 세계의 여타 국가의 학교수학 교육과정과 달리 미분방정식을 학교수학에서 다루지 않는 대한민국의 특성상, 미분방정식 단원에 대한 내용은 제거하였다. 또한 국내외로 저명한 또 다른 대학 미적분학 교재인 Thomas(2018)의 미분적분학 교재와 김홍종(2016)의 미적분학 교재를 추가로 참고하여 미적분학 개념의 구조를 더욱 보강하였다.

이때 대학 미적분학의 개념은 새로이 제시되는 개념에 더해 학생들이 기존에 학

5) 초월함수에 대한 내용을 초반에 다루는 단원 순서를 채택한 판.

습한 바 있는 대한민국 2015개정 수학과 교육과정 상의 학교수학[6] 개념 체계와 두 가지 방법으로 연결하였다. 학교수학에서 제시되었던 수학적 개념과 같은 내용을 재정의함으로써 대학 미분적분학에 제시되는 개념은 '고등대체개념'으로, 개념이 적용되는 대상의 층이 학교수학과 다르거나 기존 학교수학에서의 개념을 일반화해 대학 미분적분학에 제시되는 개념은 '고등발전개념'이 그것이다.

2. 미적분학 단원별 개념 구조의 지도

본 연구에서 대학 미적분학의 개념을 정리한 '대학수학 AI 학습시스템 구축을 위한 개념 구조 지도'에서는 <미적분학> 전체를 '미분', '적분', '테일러 급수와 곡선', '다변수함수와 벡터해석' 네 개의 대단원으로 분류하였다. 각각의 대단원은 학습 내용에 맞게 중단원과 소단원으로 다시 분류되고, 소단원을 기준으로 학습 요소에 따른 개념 요소를 지정 후 이를 학교수학에 제시된 수학적 개념을 '고등대체개념'과 '고등발전개념'으로 구분하여 대응하였다. 이에 대한 내용은 [그림 1]에 나타나 있다.

2.1. '미분' 대단원의 개념 구조 구성

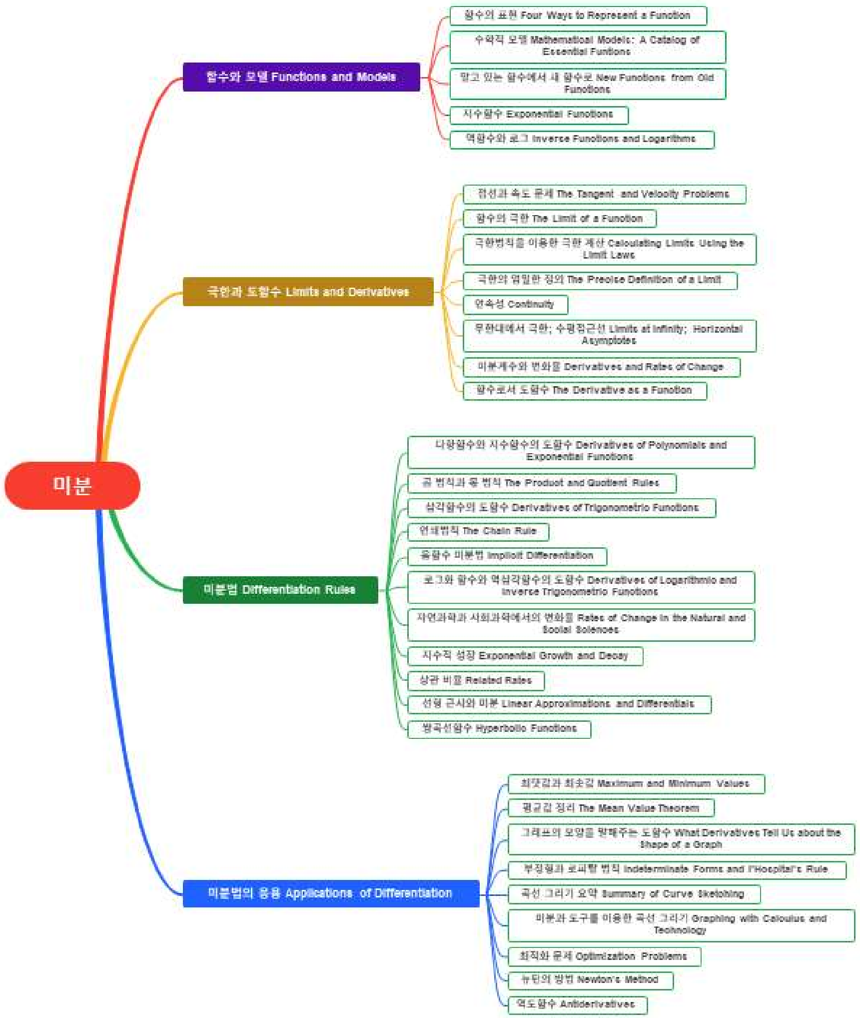
'미분' 대단원은 미적분학에서 다루는 기본적인 대상인 함수와 극한과 연속, 변화에 대한 대수적, 해석적, 기하적인 설명을 제시하며, 도함수와 미분법에 대한 개념과 응용을 다룬다. '미분' 대단원은 '함수와 모델', '극한과 도함수', '미분법', '미분법의 응용'의 4개 중단원으로 구성되며, 중단원에 대하여 총 33개의 소단원이 분류되었다.

이 과정에서 대학 미적분학에서 제시되는 학습 내용요소로서 87개의 개념을 식별하였다. 이중에서 대학 미적분학 자체적인 개념은 28개, 고등학교 학교수학의 개념과 연결되어 있는 개념은 59개였으며, 해당 개념과 연결된 고등학교 학교수학의 개념은 중복을 제외하고 63개였다. 이에 대한 내용은 [그림 3]에서 [그림 6]에 나타나 있다.

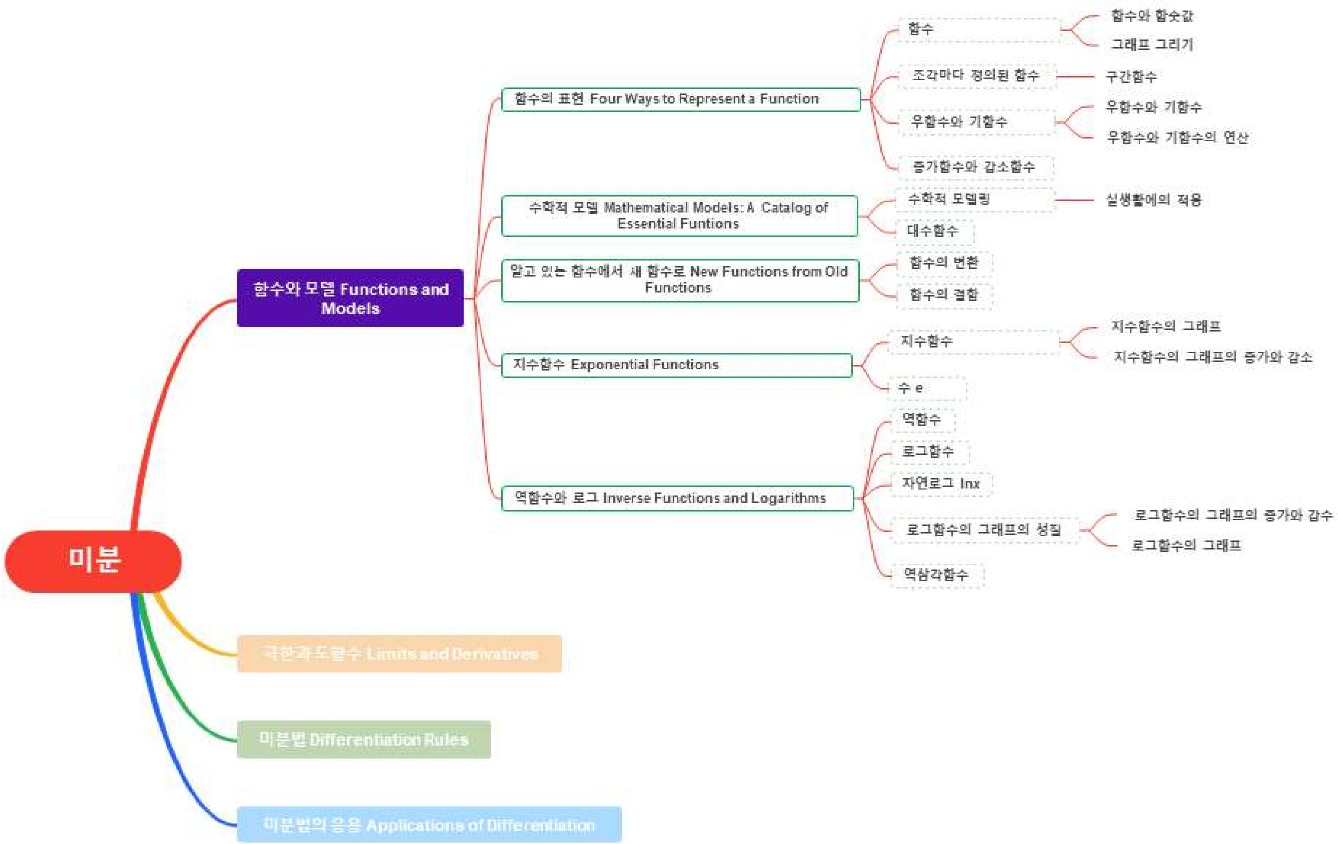
---

6) 공통 과목인'수학', 일반 선택인 수학1', 수학2', '미적분', '확률과 통계'와 진로 선택 중 '기하'의 개념을 포함한다.

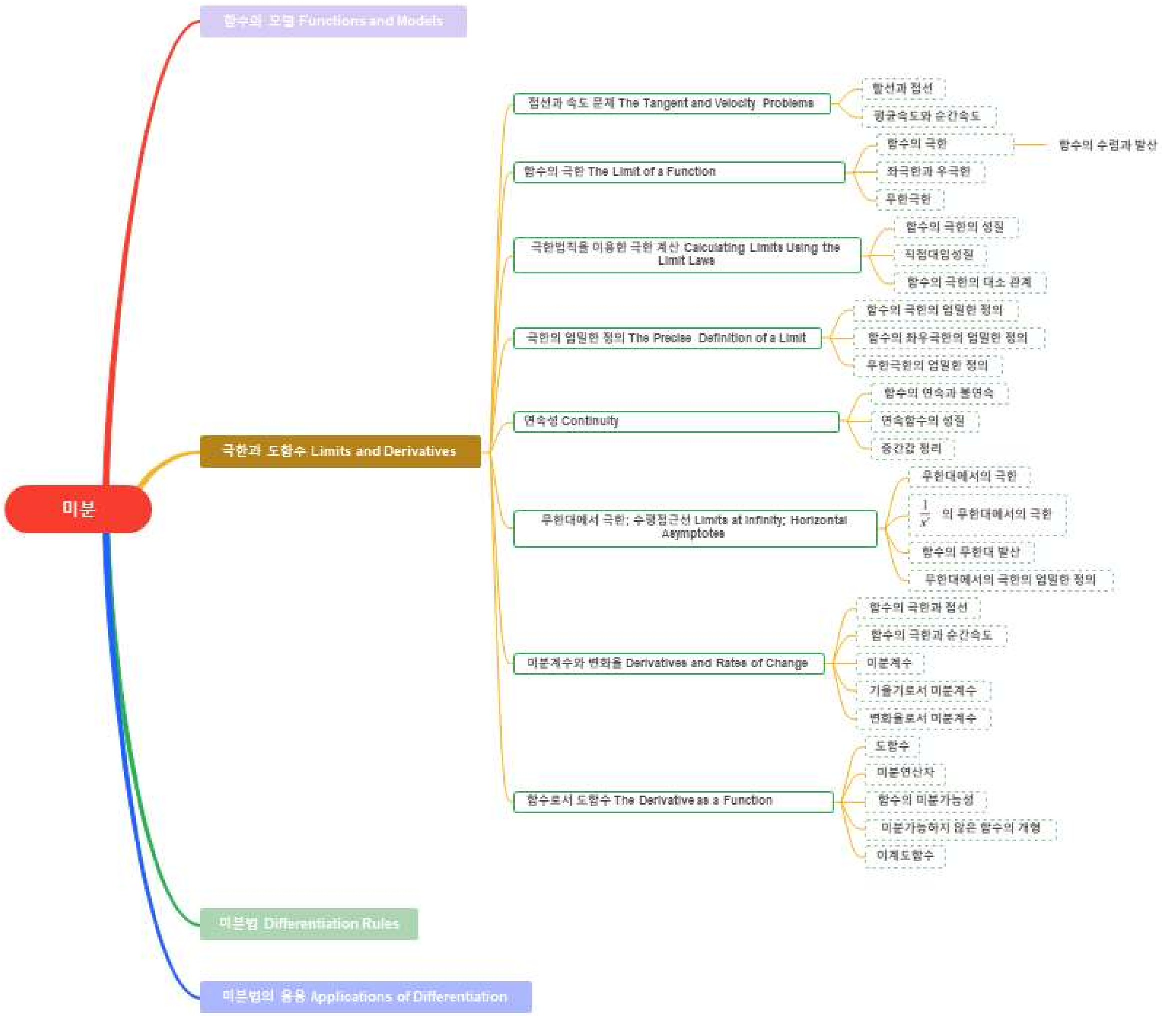
[그림 1] <미적분학> 개념 구조 지도



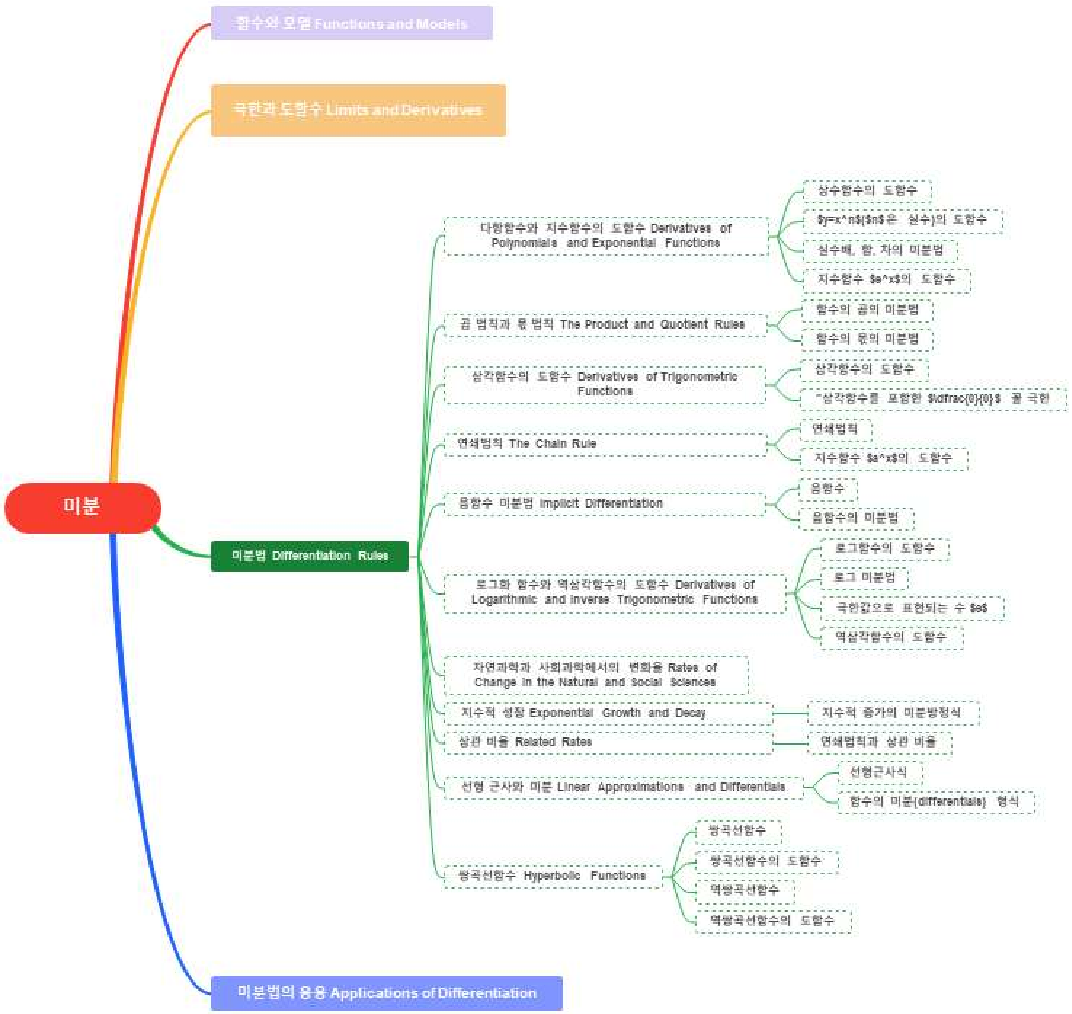
[그림 2] <미분> 대단원 개념 구조 지도



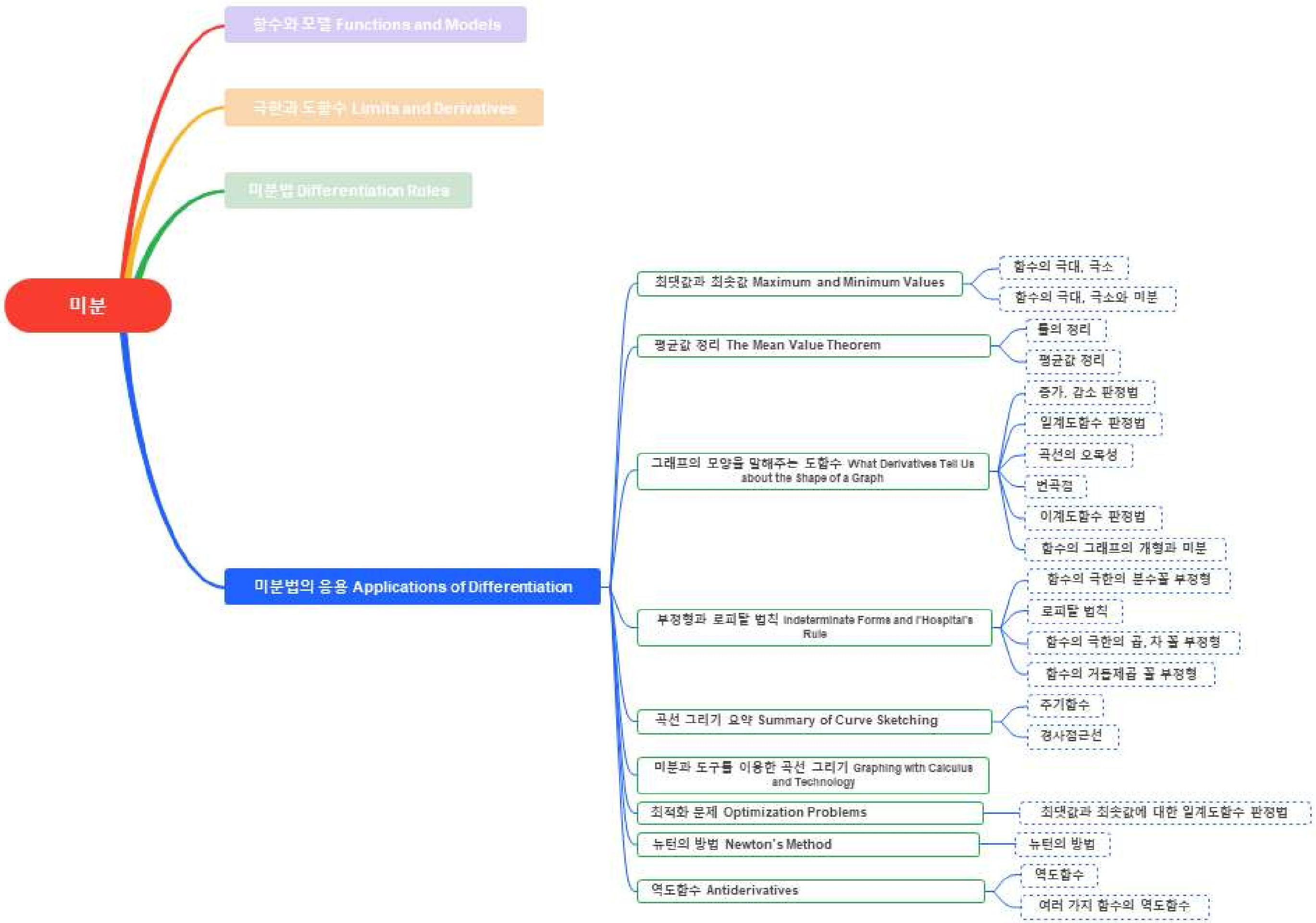
[그림 3] <함수와 모델> 중단원 개념 구조 지도



[그림 4] <극한과 도함수> 중단원 개념 구조 지도



[그림 5] <미분법> 중단원 개념 구조 지도



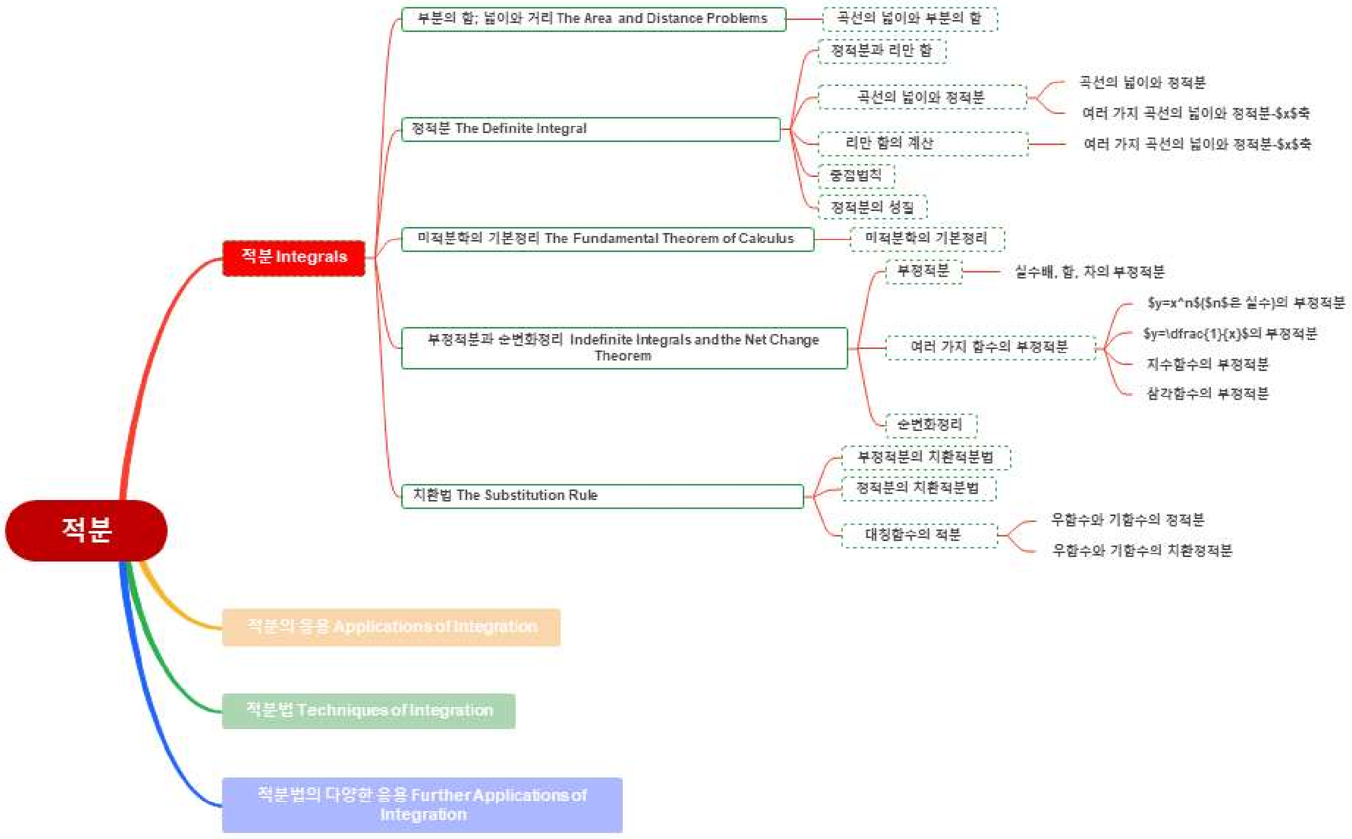
[그림 6] <미분법의 응용> 중단원 개념 구조 지도

2.2. ‘적분’ 대단원의 개념 구조 구성

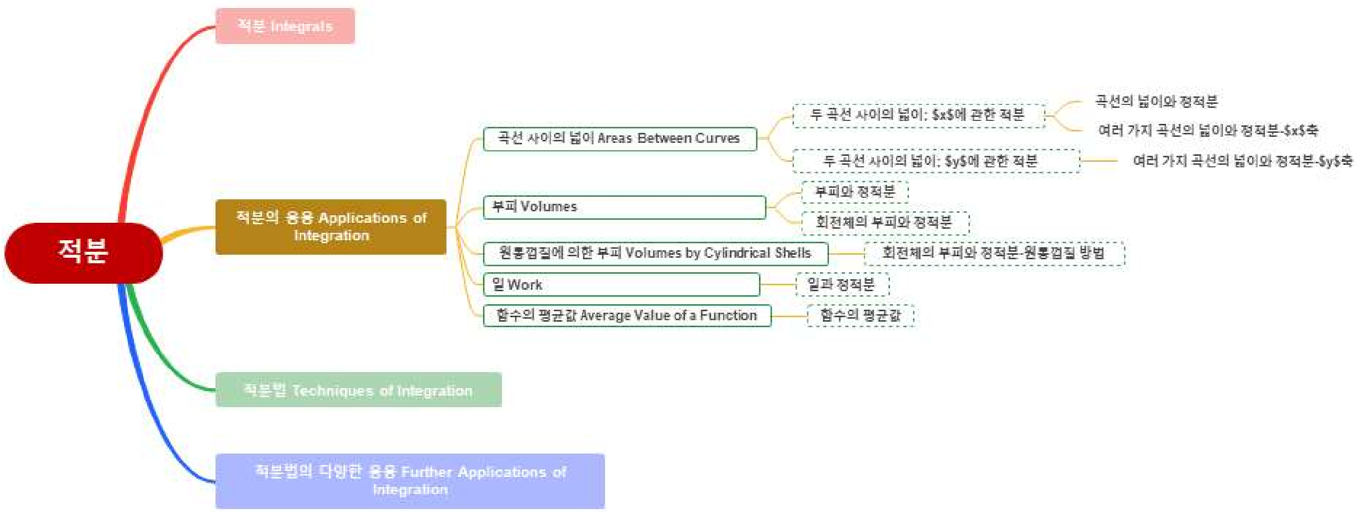
‘적분’ 대단원은 넓이와 거리에 대한 해석 및 리만합과 정적분, 미분의 역과정으로서 부정적분, 이를 아우르는 미적분학의 기본정리, 적분법과 그 응용에 대한 내용을 다룬다. ‘적분’ 대단원은 ‘적분’, ‘적분의 응용’, ‘적분법’, ‘적분법의 다양한 응용’의 4개 중단원으로 구성되며, 중단원에 대하여 총 23개의 소단원이 분류되었다. 이외에도 타 학문과의 응용도 구분 가능하며 이는 [그림 7]과 같이 정리 할 수 있다.

이러한 과정을 통해 대학 미적분학에서 제시되는 학습 내용요소로서 50개의 개념을 식별하였다. 이중에서 대학미적분학의 자체적인 개념은 26개, 고등학교 학교수학의 개념과 연결되어 있는 개념은 24개였으며, 해당 개념과 연결된 고등학교 학교수학의 개념은 중복을 제외하고 30개였다. 이에 대한 내용은 [그림 8]에서 [그림 11]에 나타나 있다.

[그림 7] <적분> 대단원 개념 구조 지도

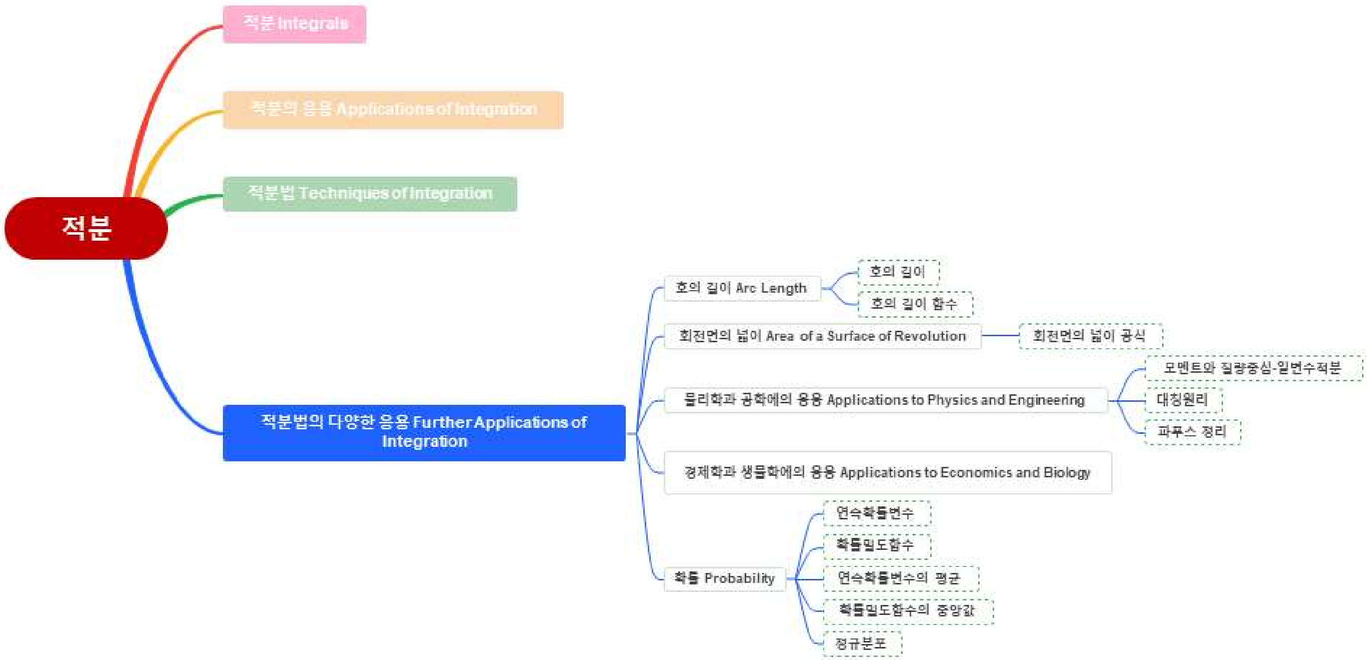


[그림 8] <적분> 중단원 개념 구조 지도



[그림 9] <적분의 응용> 중단원 개념 구조 지도

[그림 10] <적분법> 중단원 개념 구조 지도

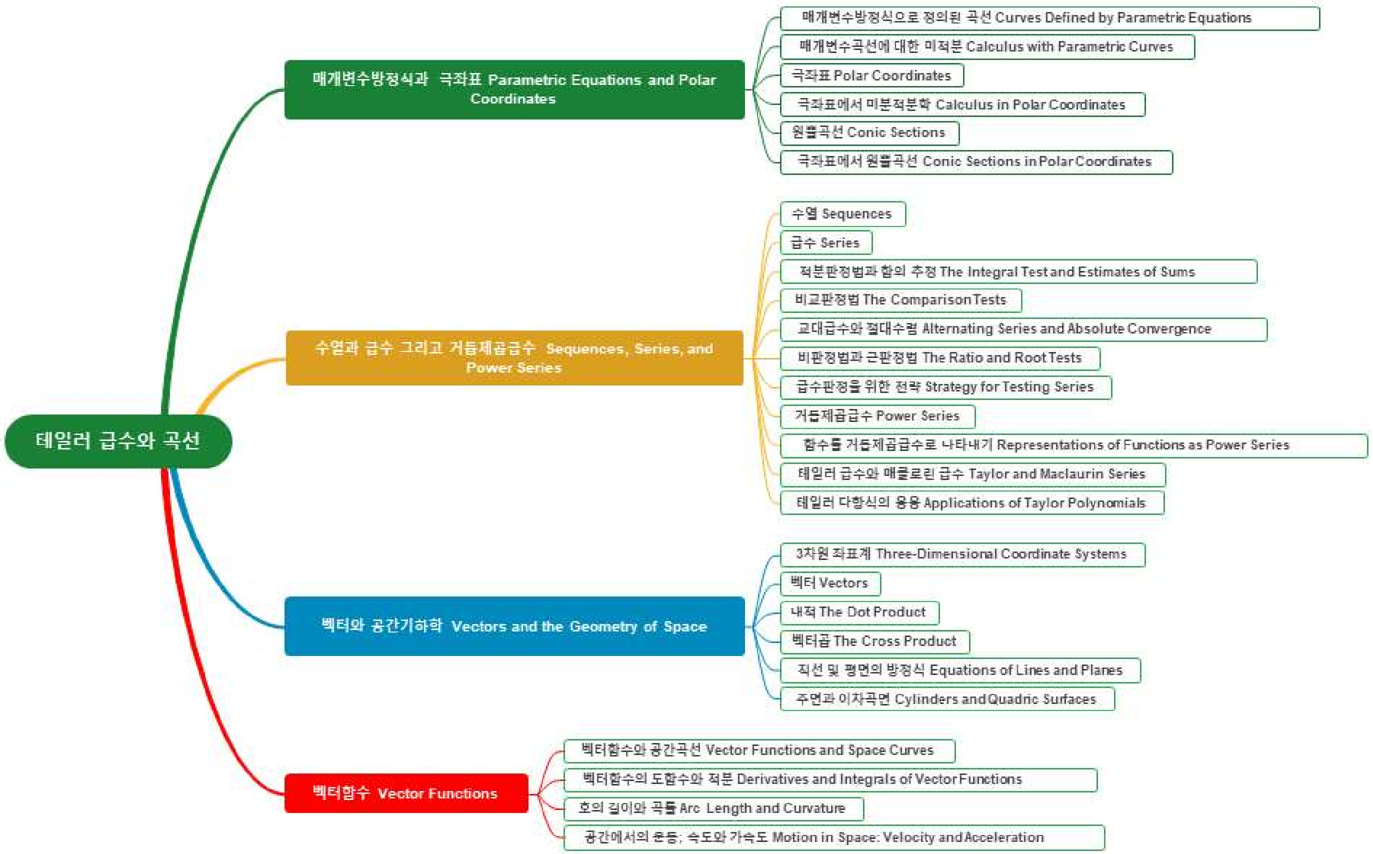


[그림 11] <적분법의 다양한 응용> 중단원 개념 구조 지도

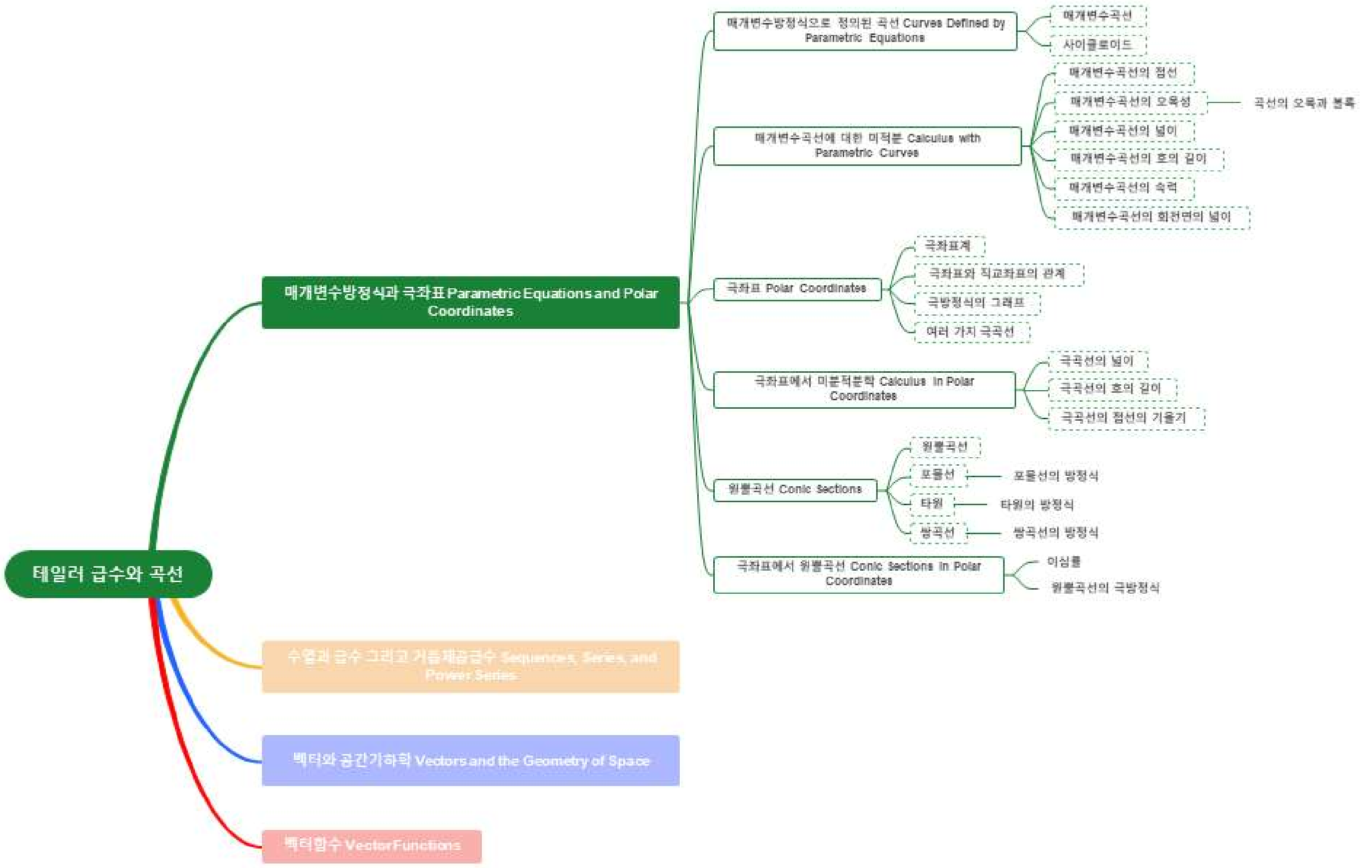
2.3. ‘테일러 급수와 곡선’ 대단원의 개념 구조 구성

‘테일러 급수와 곡선’ 대단원은 매개변수와 좌표계, 무한급수와 이에 대한 해석적인 개념들을 비롯해 공간과 공간을 이루는 벡터, 실함수를 확장한 벡터함수에 대해 다룬다. ‘테일러 급수와 곡선’ 대단원은 ‘매개변수방정식과 극좌표’, ‘수열과 급수 그리고 거듭제곱급수’, ‘벡터와 공간기하학’, ‘벡터함수’의 4개의 중단원으로 구성되며, 중단원에 대하여 총 27개의 소단원이 분류되었다. 이에 대한 내용은 [그림 12]에 나타나 있다.

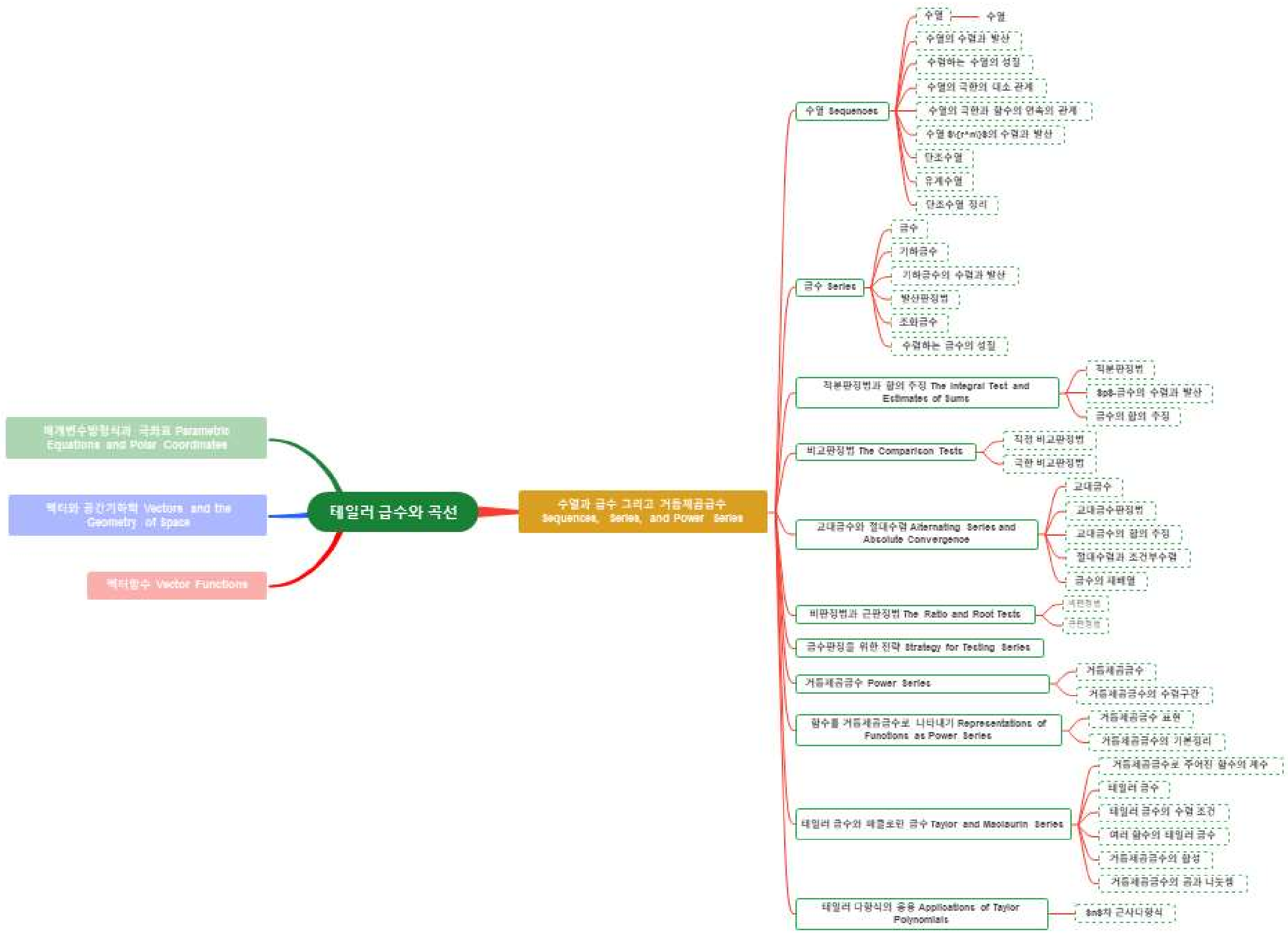
이 과정에서 대학 미적분학에서 제시되는 학습 내용요소로서 101개의 개념을 식별하였다. 이중에서 대학미적분학의 자체적인 개념은 64개, 고등학교 학교수학의 개념과 연결되어 있는 개념은 37개였으며, 해당 개념과 연결된 고등학교 학교수학의 개념은 중복을 제외하고 48개였다. 이에 대한 내용은 [그림 13]에서 [그림 16]에 나타나 있다.



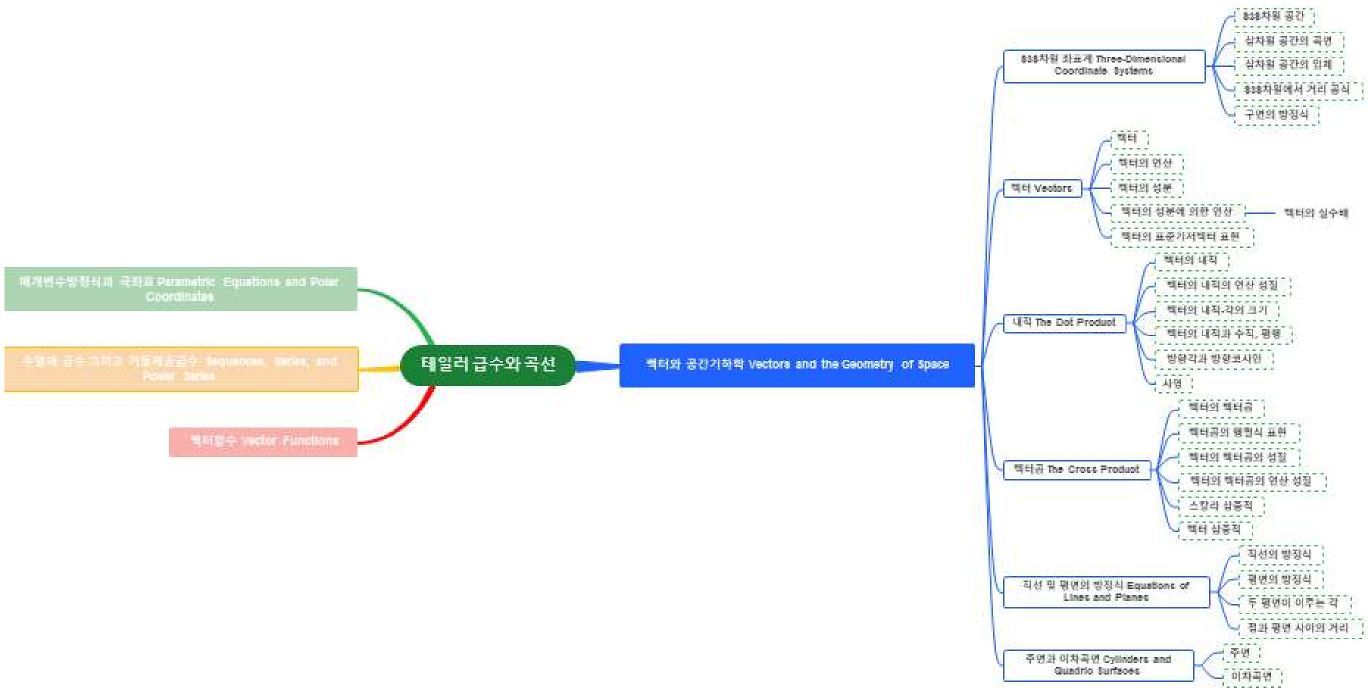
[그림 12] <테일러 급수와 곡선> 대단원 개념 구조 지도



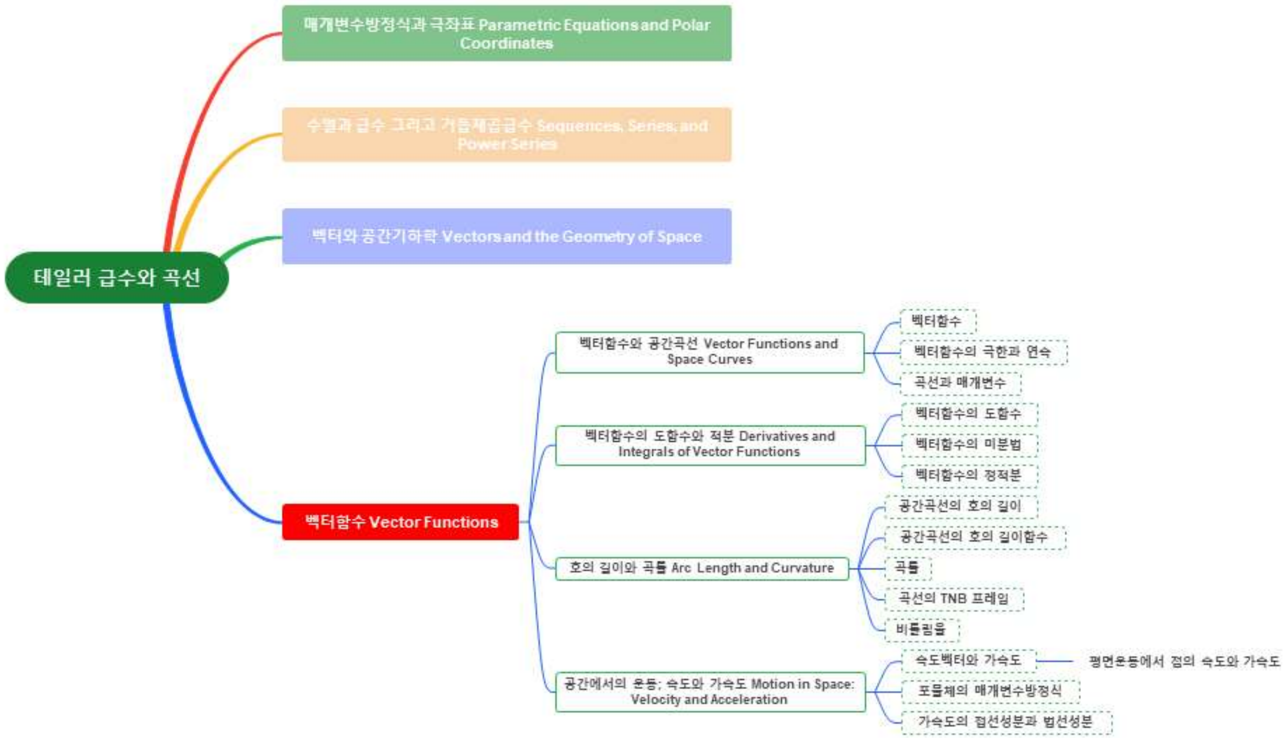
[그림 13] <매개변수방정식과 극좌표> 중단원 개념 구조 지도



[그림 14] <수열과 급수 그리고 거듭제곱급수> 중단원 개념 구조 지도



[그림 15] <벡터와 공간기하학> 중단원 개념 구조 지도

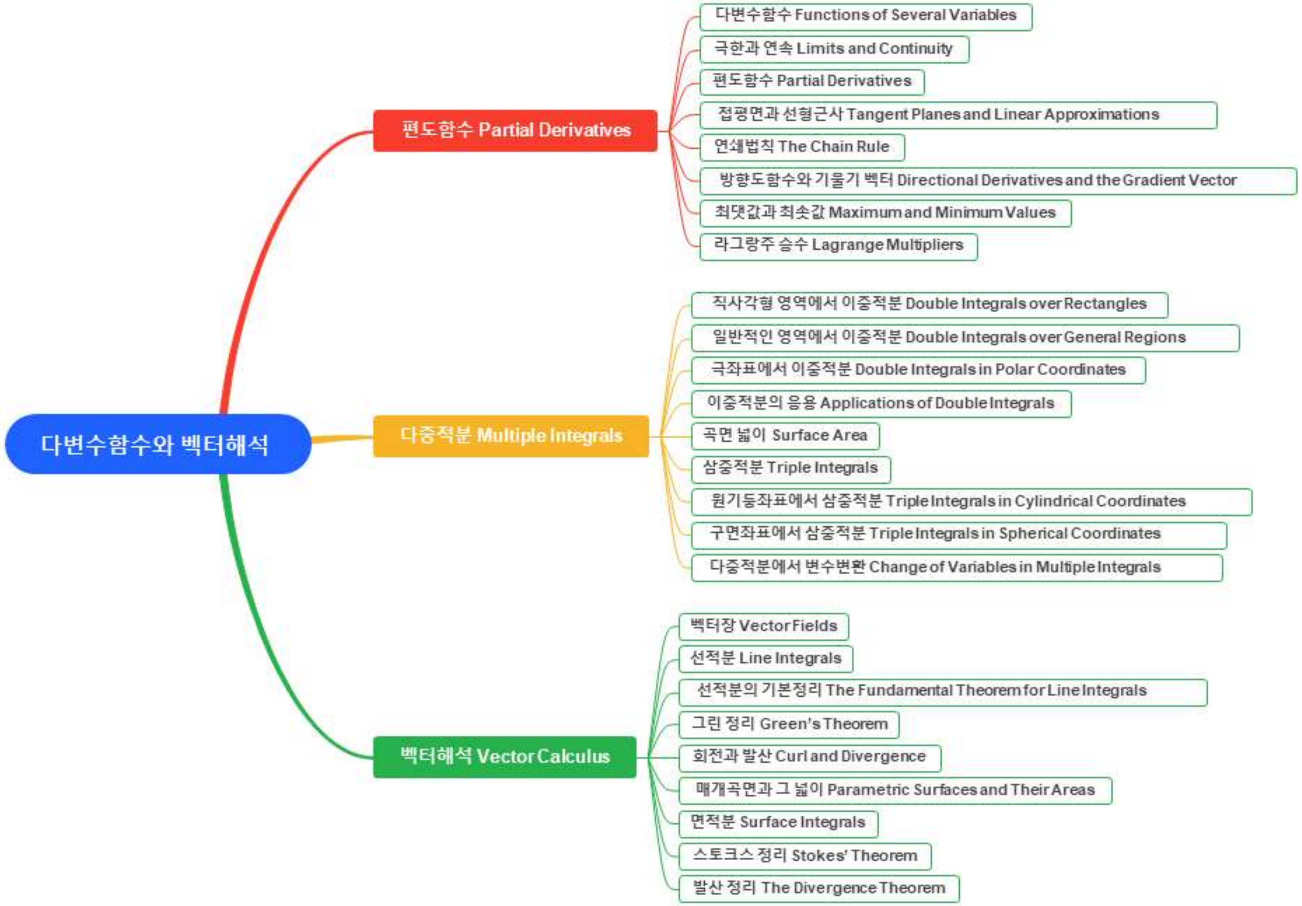


[그림 16] <벡터함수> 중단원 개념 구조 지도

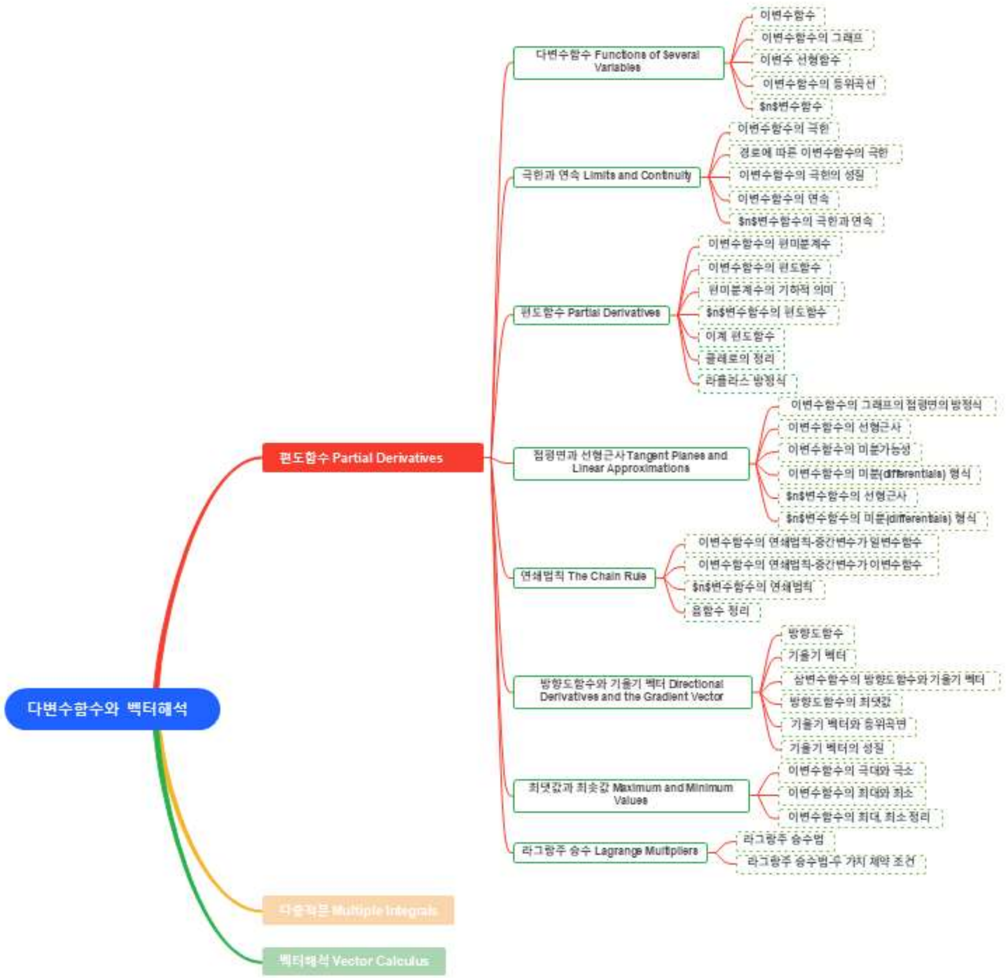
2.4. ‘다변수함수와 벡터해석’ 대단원의 개념 구조 구성

‘다변수함수와 벡터해석’ 대단원은 일변수함수에서 더 나아간 다변수함수 및 벡터장의 미분과 적분을 일변수함수의 미분과 적분에 대한 일반화된 확장으로서 다룬다. ‘다변수함수와 벡터해석’ 대단원은 ‘편도함수’, ‘다중적분’, ‘벡터해석’의 3개의 중단원으로 구성되며, 중단원에 대하여 총 26개의 소단원이 분류되었다. 이에 대한 내용은 [그림 17]에 나타나 있다.

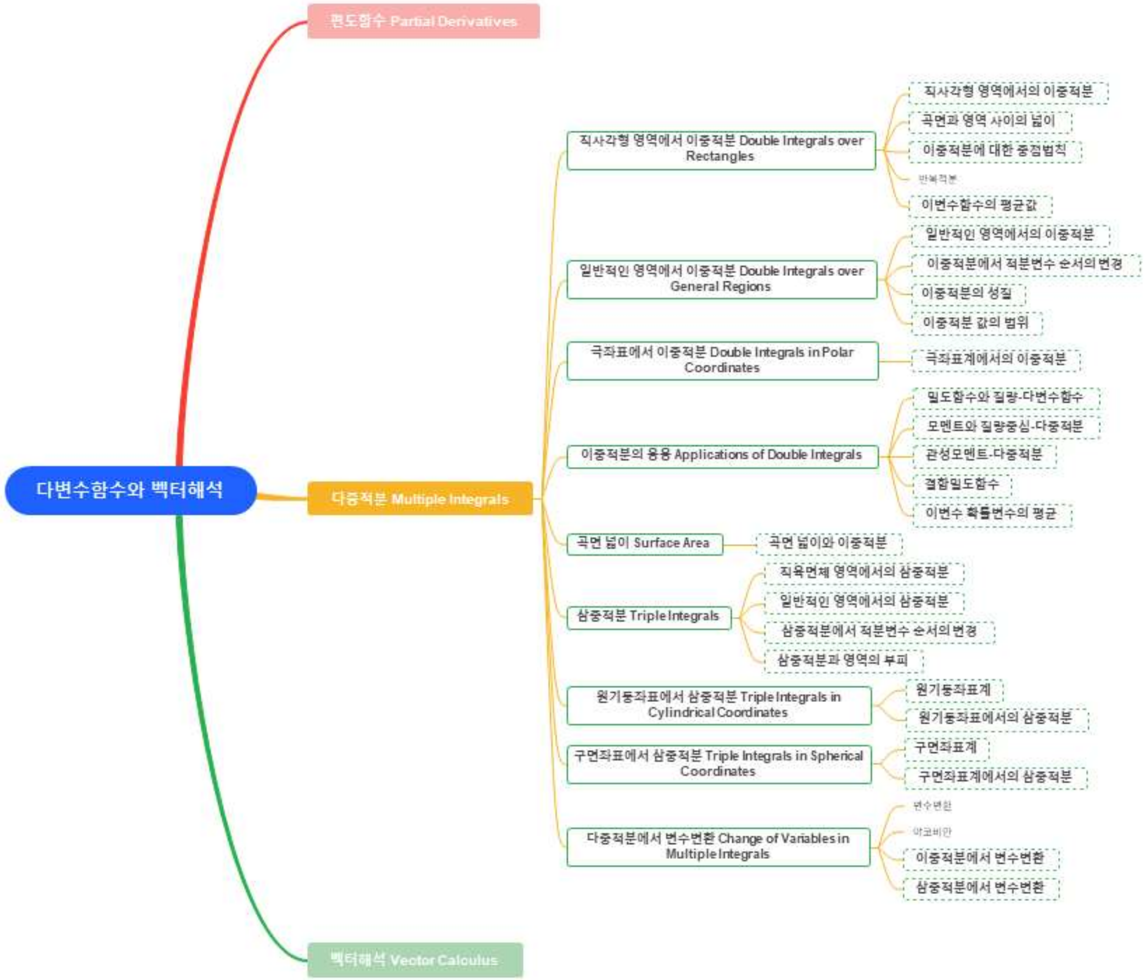
이 과정에서 대학 미적분학에서 제시되는 학습 내용요소로서 96개의 개념을 식별하였다. 이중에서 대학미적분학의 자체적인 개념은 94개, 고등학교 학교수학의 개념과 연결되어 있는 개념은 2개였으며, 해당 개념과 연결된 고등학교 학교수학의 개념은 중복을 제외하고 2개였다. 이에 대한 내용은 [그림 18]에서 [그림 20]에 나타나 있다.



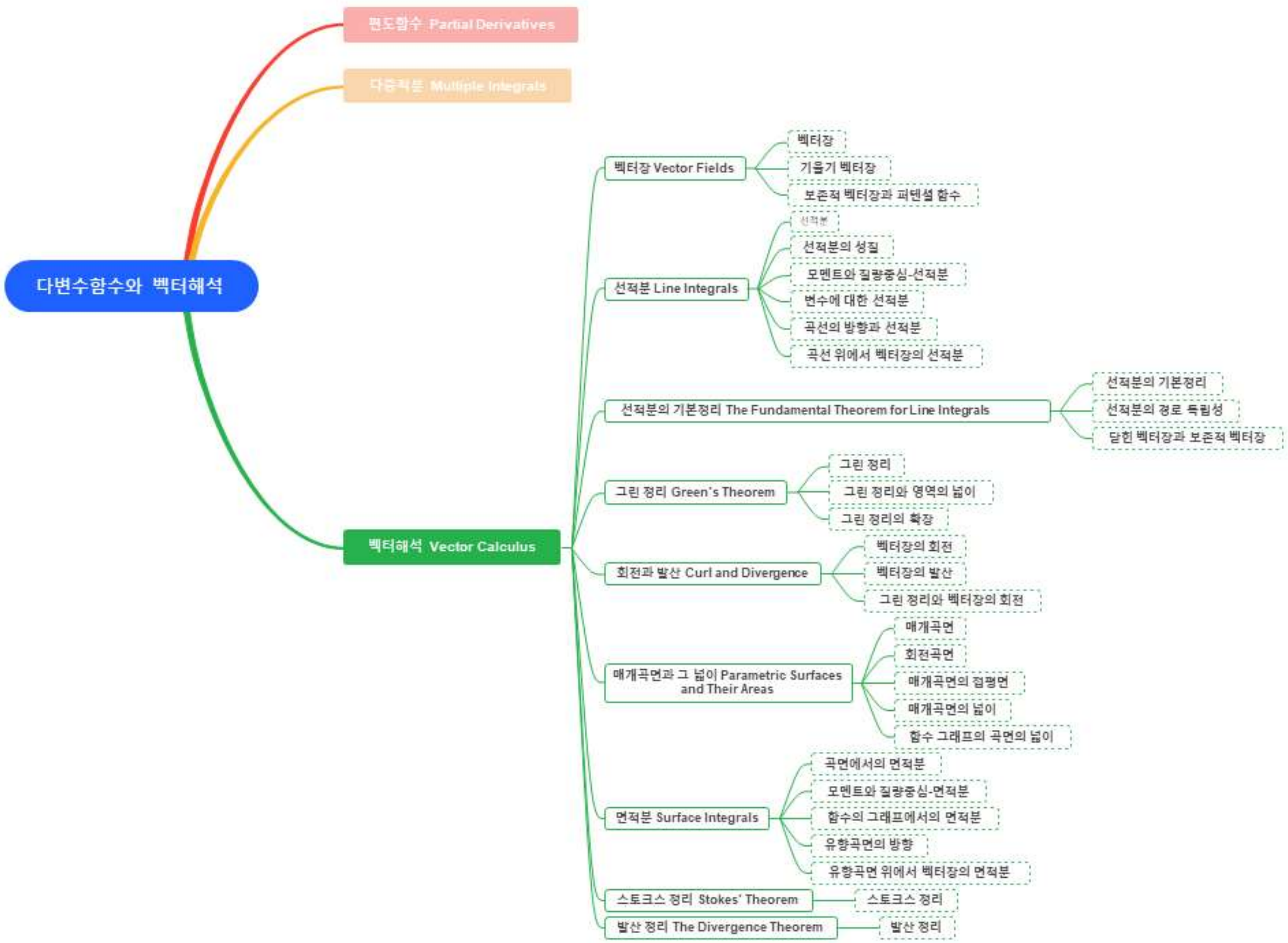
[그림 17] <다변수함수와 벡터해석> 대단원 개념 구조 지도



[그림 18] <편도함수> 중단원 개념 구조 지도



[그림 19] <다중적분> 중단원 개념 구조 지도



[그림 20] <벡터해석> 중단원 개념 구조 지도

3. 연구의 종합적 결과 및 기대효과

종합적으로 본 연구에서는 대학 미적분학을 총 4개의 대단원, 15개의 중단원, 109개의 소단원으로 구분해, 총 334개의 개념으로 이루어진 개념 구조의 지도를 작성하였다. 334개의 개념 중 대학 미적분학의 자체적인 개념은 212개, 고등학교 학교수학과 연결된 개념은 122개였으며, 해당 개념과 연결된 고등학교 학교수학의 개념은 중복을 제외하고 130개였다.

개념 지도(Concept Map)는 수학적 개념에 대한 조직을 이루고 세분화를 통해 해당 단원에 대한 개념들 사이의 관계를 설명하는 위계의 질서를 시각적으로 표현한 것으로(서보억, 2018; Karoline, 2009) 수학을 이해하는 데 있어 핵심적인 역할을 하는 것이 알려져 있다. 이런 개념 구조의 지도는 학생에게 있어 문제해결의 인지를 돕는 도구가 될 수 있으며, 수학적 지식의 체계를 발달시키고 체계화하는 도구로 사용될 수 있으며, 더 나아가 교수자가 개별 학생의 이해 정도를 파악하는 데 있어 유용하게 이용될 수 있다.

미적분학에서 식별한 총 334개의 수학적 개념은 각각의 내용과 더불어 그 개념들 사이에 일정한 규칙으로 연결, 구성, 확장되는 일반화를 통해 위계를 이루고 있으며 적절한 순서에 따라 상호작용이 가능하다. 또한 고등학교 수학 교육과정의 130개 개념과 연결됨으로써 기존 고등학교의 넓은 문제 풀과 널리 연결된 교수학적 연구 및 전략을 쉽게 연결할 수 있게 되었다.

Ⅲ. 결론

1. 결론

본 연구에서는 현시대 대한민국 교육이 직면한 여러 과제 중 대학 수학교육의 역할과 필요성에 대해 점검하고, 이에 대한 해결책으로서 대학수학 학습시스템 구축을 위한 개념구조를 개발하여 제시하였다. 대학 미적분학은 학생들이 학교수학에서 익혔던 미적분에서의 개념을 일변수 함수에 벡터와 공간에 대한 개념을 더하여 벡터함수(곡선)로, 다변수함수로, 벡터장(다변수 벡터함수)로 확장하며 기존의 개념과 정리를 더 넓은 영역에서 성립하도록 반복하고, 대응하고, 심화시키는 과목이다. 즉, 예를 들어 대학 미적분학에서 학생들은 발산정리의 식

$$\iiint_E \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

를 보고 벡터장의 발산을 함수의 도함수와 연결 지어야 한다. 여기에 더해 정적분에서 구간에 따른 함수의 정적분은 구간의 경계, 양끝값에서의 원시함수의 함숫값의 차로 바꿔서 나타낼 수 있다는 미적분학의 기본정리가 삼차원 영역에서의 삼중적분이 그 영역의 경계 곡면에서의 면적분으로 바꿔서 계산할 수 있다는 발산정리의 특수한 경우임을 이해해야 미적분학에 대해 온전히 이해했다고 할 수 있다. 이렇듯 학습 끝에 학생들에게 최종적으로 함수와 공간에 대한 쌍대성(duality)을 이해하는 것을 미적분학 교육의 목표로 삼을 때, 이 교육 목표에 성취에 이르기까지의 과정에서 본 연구의 개념 구조는 다음과 같은 의미를 가질 수 있다.

첫째, 개별 문항에 고유한 특성으로서 개념을 태깅함으로써 학생들의 취약 개념을 쉽게 파악할 수 있다. 함수의 층에 따라 반복되고 일반화되는 방대한 분량의 미적분학에서 어느 함수 층의, 어느 개념부터 학습에 어려움이 오는지 추려낼 수 있다. 또한 기존의 고등학교 개념 체계와 연결시킴으로써 필요한 수준에서의 클리닉을 방대한 양의 자료를 바탕으로 빠르게 제공할 수 있어 효율적인 미적분학 교수학습이 가능해질 것이다.

둘째, 수학의 위계성에 의해 개념, 즉 인지 요소 간에는 지식 가지가 형성되며, 개념 간의 관계에 주목함으로써 숙달 여부를 평가하길 원하는 복수의 인지요소를 문항에 지정하여 학생들이 왜 이해하지 못하는지를 판정하는 평가 방법인 인지진단평가(Cognitive Diagnostic Assessment)가 가능해진다. 대학 미적분학에서 이를 기반으로 하는 평가, 진단과 피드백은 대학 미적분학의 개념을 기존 학교수학의 개념과 두 가지 다른 단계의 관계를 주고 학생들의 풀이 데이터를 AI로 분석함으로써 더욱 폭 넓고 정밀하게 가능해질 것이다. 또한 이후 선형대수학과 해석학 등 다른 대학수학의 교과에서의 적용에서도 이러한 프로세스를 발전시켜 도입할 수 있을 것이다.

셋째, 이런 학습시스템을 통한 신입생 미적분학 교수학습의 제공은 대학생들이 대학 미적분학을 이해하는 방식과 취약한 개념을 분석함으로써 향후의 공부에서 필요한 지식의 토대가 되는 수학적인 개념을 단순히 기계적으로 공식을 외우고 수치를 대입하는 수단이 아닌, 능동적으로 이용가능한 개념으로 받아들일 수 있도록 하는 교수학적인 의의를 가질 수 있다.

2. 연구의 한계점

본 연구에서 개발된 미적분학의 개념 지도는 비록 세계 유수 대학에서 사용되는 교재들을 바탕으로 작성되었으나, 기본적인 순서와 뼈대에 있어서는 하나의 주교재를 기준으로 참고하였다. 대학 이후 과정의 수학은 정의와 정리 증명의 순서를 저자가 자유롭게 선택할 수 있으며, 따라서 저자의 수학관과 교육관이 담긴 교재에 따라서 개념구조의 순서와 위계가 완전히 뒤바뀌는 경우 역시 빈번하다. 이러한 점은 미적분학에서는 크게 드러나지 않았지만, 향후 다른 대학수학의 개념 구조의 지도를 만들 때에는 이러한 가변적인 위계를 고려해야 할 것이다.

3. 제언

후속 연구 및 개발이 진행되어 이공계 신입대학생들의 길잡이가 되어 줄 수 있는 훌륭한 AI 학습시스템이 개발될 수 있는 기반을 다짐으로써 후속 연구에 대한 제언으로 다음을 제시할 수 있다.

첫째, 본 연구를 선행연구로 하여 실제 대학 수학교육 현장에서 교수학습자 양측의 역량에 진일보를 불러올 수 있는 AI 교육 환경을 구성할 수 있다. AI가 수학과목 학습에 많은 도움을 줄 수 있다는 점은 여러 연구를 통해 입증되었고, 현재도 많은 연구자들과 에듀테크 기업들이 노력하고 있는 현실에서 이번 연구에서 학생들의 입장에서 도움을 많이 받을 수 있는 AI학습시스템을 구축한다는 전제하에 선행연구로 부족함이 없을 것이다. 대학수학은 학교수학에서 더 나아가 학문적인 깊이가 다르며, 입시위주의 교육과 차별화되는 학문으로서의 순수 수학이 부각되는 점 때문에 관련된 기술 개발에는 보다 깊은 전문성과 미답의 영역을 개척해야 하는 어려움을 지니고 있다. 하지만 첫술에 배부를 수 없듯이 대학수학에서 가장 기초가 되는 미적분학의 개념연구를 선행함으로 데이터를 제공하고자 하는 목표의 준비를 마칠 수 있었다.

둘째, 미적분학 이후 대학교육의 내용들, 선형대수학, 해석개론, 정수론, 현대대수학, 복소함수론, 확률론, 위상수학 등의 학문과 순수수학 외의 영역인 공학수학, 생명과학 수학, 경제수학, 통계학 등에 대해서도 이와 같은 개념 구조를 개발하여 통합적인 AI 학습시스템을 제시할 수 있다. 캐나다의 수학자 로버트 랭글랜즈(Robert Phelan Langlands, 1936~)가 제시한 대수학, 기하학, 해석학의 대역적인

연결에 대한 프로젝트인 ‘랭글랜즈 프로젝트’에 대한 세계적인 학계의 주목이 시사하는 바와 같이 여러 수학의 학문에 대한 ‘수학의 대통합’은 보다 깊은 이해와 통찰, 도약에 필수적이다. 학교수학부터 대학수학의 여러 학문에 이르기까지 개념 구조를 완성하여 AI 학습시스템을 구축한다면 학생들의 수학 학습역량 증진과 이해와 더불어 교수자의 편의성 대학수학교육 연구에도 적지 않은 진전과 도움이 있을 것이다.

IV. 부록

참고 문헌

김홍종. (2016a). **미적분학 1+ (제2판)**. 서울: 서울대학교출판문화원.

김홍종. (2016b). **미적분학 2+ (제2판)**. 서울: 서울대학교출판문화원.

대한수학교육학회. (2023년11월20일). 대한수학교육학회·한국수학교육학회 공동성명서-‘2028 대입제도 개편 시안’에 대한 전면 재검토 요구-. *대한수학교육학회*. http://www.ksme.info/

대한수학회. (2022년2월25일). 2022 수학과 교육과정 개정의 핵심 쟁점과 우려. *대한수학회*. https://www.kms.or.kr/2022mathforum/

박희철, 박영자 (2008) 다변수 미분에 관하여. **한국수학사학회지**. **21**(2), 81-90.

이현주, 류중현, 조완영. (2015). 통합적 이해의 관점에서 본 고등학교 학생들의 미분계수 개념 이해 분석. **수학교육논문집**, **29**(1), 131-155.

조항윤. (2023). **대학생의 다변수 미적분학에서의 미분 개념에 대한 이해**. 석사학위논문, 서울대학교 대학원, 서울

황혜정, 김미향. (2016). 미분 개념의 이해에 관한 수업 사례. **학교수학**, **18**(2), 277-300.

Cho, H. & Kwon, O. N. (2023). UNDERGRADUATE STUDENTS' UNDERSTANDING OF THE CONCEPT OF DERIVATIVES IN MULTIVARIABLE CALCULUS. In A. Michal, K. Boris, L. Roza, R. Laurie, & T. Michal (Eds.), *Proceeding of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2)* (pp. 179-186). University of Haifa, Israel: PME

Dorko, A., & Weber, E. (2014). Generalising calculus ideas from two dimensions to three: How multivariable calculus students think about domain and range. *Research in Mathematics Education, 16*(3), 269-287.

Ellis, A. B., Lockwood, E., Tillema, E., & Moore, K. (2022). Generalization across multiple mathematical domains: Relating, forming, and extending. *Cognition and Instruction*, *40*(3), 351-384.

Martinez-Planell, R., Gaisman, M. T., & McGee, D. (2017). Students' understanding of the relation between tangent plane and directional derivatives of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior, 46*, 13-41.

Martinez-Planell, R., & Trigueros, M. (2021). Multivariable calculus results in different countries. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(3), 695-707.

OECD. (2019). Technical report of the survey of adult skills (PIAAC) (3rd ed.). OECD Skills Studies, OECD Publishing, Paris.

Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. (2020a). *Calculus, Early Transcendentals Edition (9th ed)*. Boston: Cengage Learning.

Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. (2020b). *Calculus, Metric Edition (9th ed)*. Boston: Cengage Learning.

Stewart J., Clegg D., & Watson, S. (2021) **핵심 미분적분학(제9판)**, (수학교재편찬위원회 역). 서울: 경문사. (원본 출판 2020)

Stewart J., Clegg D., & Watson, S. (2023). **스튜어트 미분적분학(제9판)**, (미적분학 교재편찬위원회 역). 서울: 북스힐. (원본 출판 2020)

Thomas, G., Weir, M., & Hass, J. (2018). *Thomas' Calculus (14th ed)*. Boston: Pearson.

Trigueros, M., & Martinez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two- variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3–19.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language* (edited and revised by Kozulin, A.). Cambridge, MA: MIT Press.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, 103-127.

대학수학 AI 학습시스템 구축을 위한 개념 구조 연구

2024년01월25일 인쇄
2024년01월25일 발행

발 행 처　한국대학교육협의회

08504 서울시 금천구 서부샛길606 대성디폴리스A-23층

전화 02) 6919-3951~4
인 쇄 처　백양익산 종합상사
전화 02) 566-1736

비매품/무료
93370
9 791166 962882
ISBN 979-11-6696-288-2