

모든 학생을 위한

양적추론(Quantitative Reasoning)
프로그램 개발 방안 연구 (1차 연도)

2021. 12



한국대학교육협의회
Korean Council for University Education



한국교양기초교육원
Korea National Institute for General Education

모든 학생을 위한
양적추론(Quantitative Reasoning) 프로그램
개발 방안 연구
(1차 연도)

연구자: 최병문 (대전대학교)
김혜영 (한국체육대학교)
박희문 (충남대학교)
배영희 (오산대학교)
안현호 (대구대학교)
조연정 (경북대학교)



한국대학교육협의회
Korean Council for University Education



한국교양기초교육원
Korea National Institute for General Education

CONTENTS

I 서론	1
1. 연구의 필요성	1
1) 연구배경	1
2) 연구의 목적 및 방법	3
2. 연구 목표	4
3. 연구 개요	5
II 국내·외 대학 현황 분석	9
1. 국내 현황	9
1) 국내 대학의 양적추론 프로그램 개설 현황	9
2) 한국교양기초교육원의 역할	16
2. 해외 현황	17
1) 미국대학협의회(Association of American Colleges & Universities, AAC&U)의 역할	18
2) 미국 대학의 양적추론 프로그램 개설 현황	18
III 양적추론의 개념과 내용	35
1. 양적추론의 이해	35
1) 추론과 양적추론	35
2) 데이터 리터러시(Data Literacy)	38
3) 양적추론과 데이터 리터러시	42
2. 양적 데이터 처리를 위한 기본 개념	44
1) 측정과 데이터	44
2) 모델(Model)과 가정	51
3) 페르미 추정	53
3. 양적추론 학습자료 개발	53
1) 교수자를 위한 양적추론 주제 발굴 방법	53
2) 데이터 수집하기	55

IV 양적추론을 위한 기초수학 **63**

1. 수리력	63
2. 산술	64
1) 지수	64
2) 로그	65
3) 조합	66
3. 대수	68
1) 변수의 필요성; 공식의 가치; 추상화의 경우	68
2) x 구하기; x, y 구하기	69
3) 문장제 문제	70
4. 기하	71
5. 함수	72
1) 그래프	73
2) 그래프 표현	74
3) 선형 함수	74
4) 이차함수	75
5) 지수함수	76
6. 확률	78
1) 기댓값	80
2) 조건부 확률 베이즈 정리	80
7. 통계	81
1) 평균, 표준 또는 평균	81
2) 중앙값	82
3) 분산, 표준 편차	82
4) 확률 분포 vs 통계 분포	83
5) 정규 분포: 중심극한정리	84
6) p-값과 귀무가설	88
7) 상관관계 vs 인과관계	89
8) 회귀: 어쨌든 어떤 직선인가?	89

CONTENTS

V 분야별, 수준별 양적추론 학습자료 93

1. 경제 및 사회 분야	93
1) 중국 자산이 20년에 17배 증가했다면 매년 몇 %나 증가한 것일까?	93
2) 한국에서 백만장자 수는 74만 명...1인당 평균 자산은?	98
2. 과학 및 응용 분야	100
1) 세포는 왜 작은가?	100
2) 여름철 야외식탁에 방치한 음식물에서 식중독을 일으키는 대장균이 얼마나 증식할까?	104
3) 아이스커피 얼음; 덩어리 얼음과 곱게 간 얼음 중 어느 것이 더 시원할까?	108
4) 역도 경기에서 체중과 기록은 비례할까?	113
3. 보건 및 환경 분야	118
1) 한국인은 커피를 정말 좋아할까?	118
2) 온실가스 감축은 가능할까?	124
4. 역사 및 문화 분야	127
1) 양적추론 교과서 저자인 Eric Zaslow 교수가 제안한 Template	127
2) 양적추론에서 질문의 중요성 (남북전쟁에서 얼마나 많이 죽었을까?)	127
3) 남북전쟁에서 얼마나 많이 죽었을까?	128
4) 한국전쟁에서 얼마나 많이 죽었을까?	131

VI 결론 135

부록-단위 139

Ⅰ 표목차

〈표 1〉 수도권 10개 대학의 교양·기초 교육과정과 양적추론(QR) 교과목 편성 현황	10
〈표 2〉 2021학번 DS교육과정 학점 이수표	14
〈표 3〉 양적추론(QR) 교과목이 개설되어 있는 7개 대학의 교양교육 이수기준	15
〈표 4〉 예일칼리지 양적추론(QR) 영역에 개설된 교과목 예시	22
〈표 5〉 양적추론의 학습 성과로 평가해야할 6가지 능력	27
〈표 6〉 마이애미대학교 양적추론(QR) 영역에 개설된 교과목	29
〈표 7〉 데이터 리터러시의 하위역량	38
〈표 8〉 프로그램 대안의 편익과 비용	97
〈표 9〉 각 대안의 순현재가치	98

Ⅱ 그림목차

[그림 1] 하버드대학교의 교육과정	20
[그림 2] 미국 뉴욕시립대학교 소속 리먼대학의 교육과정	26
[그림 3] AAC&U Peer Review 16(3) 2014년 여름 보고서 표지 및 양적추론 개념도	36
[그림 4] 비판적 사고를 바탕으로 한 정보 리터러시, 통계 리터러시, 데이터 리터러시(Schild, 2004)	40
[그림 5] University of South Florida의 교양교육 체계	42
[그림 6] 국가데이터맵	58
[그림 7] 데이터 품질관리 개념도	59
[그림 8] 함수 $f(x) = x^2$; $-3 < x < 3$ 의 그래프	73
[그림 9] 다양한 값에 따른 지수함수 $f(x) = e^{ax}$ 의 그래프	77
[그림 10] 1, 2, 3, 5, 10, 50, 100개 동전 던지기 평균의 확률	86
[그림 11] 정규 분포 곡선	87

I

서론

1. 연구의 필요성	1
2. 연구 목표	4
3. 연구 개요	5



I. 서론

1 연구의 필요성

1) 연구배경

- 우리는 인터넷과 스마트폰, 각종 센서 등 디지털 기술의 확산으로 방대한 양의 정보를 접할 수 있는 시대에 살고 있다. 특히 경제, 산업, 에너지, 기후변화와 같은 사회현상과 자연현상을 비롯해서 개인의 일상에 이르기까지 다양한 형식의 양적 자료가 수집되고 있는 데이터 중심 사회에 살고 있다. 이렇게 수집된 양적 자료가 있으면, 그 자료를 근거로 현재의 상황을 판단할 수 있으며, 전체적인 모습을 상상하고 앞으로 어떤 일이 일어날지 미리 예측할 수 있어서 미래를 대비한 계획을 세우는데 유용하다.¹⁾
- 21세기를 사는 현대인들에게 요구되는 기본 역량은 필요한 정보를 선별하는 정보 검색 능력이다. 정보로 가득한 세상에서 양적 정보를 목적에 맞게 활용하는 데 필요한 정량적 사고방식도 데이터 중심 사회를 살고 있는 우리가 갖춰야 할 필수 역량이 되었다. 정보의 대부분은 본질적으로 양적이며 누구든 일상생활에서 의사결정을 할 때 양적 정보를 활용할 수 있어야 한다. 즉 현실의 문제를 해결하기 위해서 양적 정보를 근거로 문제를 바라보고, 데이터에서 의미 있는 맥락을 발견할 줄 아는 관점과 능력이 중요해졌다.
- 디지털 혁명과 지식정보화 시대에 양적 정보를 이해하고 활용하는 능력은 대학의 교양교육에서 길러야 하는 핵심역량이다. 양적 자료를 기반으로 한 그래프, 표, 통계, 확률 등의 정보를 이해하고 해석하고 예측하는 능력은 어떤 특정 학문분야 혹은 직업군에서만 필요한 것이 아니라 비즈니스, 교육, 문화, 보건, 예술, 스포츠 등 거의 모든 분야에서 필요하다. 한눈에 들어오지 않는 방대한 자료를 알아보기 쉽게 만들거나, 주어진 자료들 사이에서 경향성을 찾아내는 능력은 읽기와 쓰기와 같이 필수 능력이 되었다. 학생들의 전공과 관계없이, 비판적 사고를 기반으로, 데이터를 정확히 이해하고, 이를 활용하여, 의사결정을 할 수 있도록, 양적 자료를 통해서 배워야 하는 기본적인 능력을 양적추론(QR, Quantitative Reasoning)이라고 한다. 양적추론은 문제 해결을 위해서 실제 생활에서 발생하는 양적 정보를 기초수학이나 통계학을

1) 김혜영 이은하(2019) "대학 교양의 기초교육으로서 양적추론(Quantitative Reasoning) 개설 현황과 분석", *교양교육연구* 13(6), 한국교양교육학회, 29-55.

이용하여 학문적 맥락으로 설명하고 추론하는 것이다.

- ‘빅 데이터’ 분석이 전문적인 연구 응용 프로그램에서 대학 졸업생들이 일할 비즈니스, 교육, 건강, 정치, 환경 및 각 정부 기관 등 모든 영역으로 확대되고 있다. 대학에서도 학습을 모니터링하고 학습의 성과와 결과를 평가하기 위해서도 데이터를 수집하고 분석하고 있다. 이렇게 데이터가 의사결정을 하고 미래를 예측하는 데 필요한 주요 자원(resource)이라고 해서 데이터 그 자체가 가치를 창출하는 것은 아니다. 중요한 것은 데이터로부터 새로운 통찰력을 이끌어 내고 관련성을 인식하고 좀 더 정확한 의사결정을 할 수 있는 능력이다. 이와 같은 능력은 훈련 과정이 필요하고, 학습을 통해서 함양할 수 있다.
- 이미 해외의 우수 대학들은 이러한 시대적 변화를 반영하여 전공과 관계없이 모든 학생들이 비판적 사고를 기반으로 데이터를 정확히 이해하고 이를 활용하여 의사결정을 할 수 있는 능력을 갖추도록 양적추론 프로그램을 개설 운영하고 있다.²⁾ 한국교양기초교육원의 ‘대학 교양기초교육의 표준모델’에 의하면 교양기초교육에서 함양해야 할 능력과 자질은 우선 다양한 문해력(literacy)으로 ‘모든 사유의 표현을 독해하고 또 자신의 사유내용을 표현하는 능력’으로 설명하고 있다. 다양한 문해력에는 양적 문해력(quantitative literacy) 또는 수리능력(numeracy) 즉 양적추론이 포함된다. 그러나 국내의 대학들은 대부분 의사소통능력을 위한 글쓰기와 외국어 등을 교양필수로 지정하고 있고, 정량적 정보를 이해하고 활용하는 양적추론은 그 중요성에 비해 인지도가 매우 낮은 편이다. 양적추론의 근간이 되는 수학과 기초과학이 대학 교양의 기초교육으로 개설되었더라도 대부분 이공계 학생들을 위한 전공기초과목이다.
- 미국대학협의회(Association of American Colleges and Universities, AAC&U)는 학부 교육에 필요한 학습평가방법 VALUE(Valid Assessment of Learning in Undergraduate Education) 루브릭(rubrics)을 개발하였다.³⁾ VALUE 루브릭은 대학 교수진과 기업고용주 모두가 필요하다고 생각하는 학습 성과 측면에서 학생들이 졸업 수준의 성취도를 충족하고 있는지를 판단하기 위해 만든 평가 도구이다. VALUE 루브릭은 미래의 인재가 갖추어야 할 6가지 지적이며 실용적인 능력(Intellectual and Practical Skills)을 제시했으며, 이 중 하나가 양적 문해력(Quantitative Literacy, QL)이다.⁴⁾ 양적 문해력 즉, 양적추론은 “사고의 습관”이며, 역량(competency)이며 수치 데이터를 다루는데 있어서 편안함이라고 AAC&U는 정의하고 있다. 양적추론을 갖춘 학생들은 다양한 상황이나 일상생활에서 양적 문제를 이해하고 해결할 수 있는 능력을 가지게 된다. 그래서 수치적 증거를 기반으로 한 타인의 주장을 이해할 수 있고 본인 스스로 표, 그래프, 수학 방정식 등을 사용하여 문제를 해결하고

2) 김혜영 김문석(2020). “대학 교양의 기초교육으로서 양적추론(Quantitative Reasoning) 교과목의 교육 목적과 교육 내용”, 2020 춘계전국학술대회, 한국교양교육학회, 212-218.

3) <https://www.aacu.org/value>

4) 6가지 지적·실용적 능력은 탐구와 분석, 비판적·창의적 사고, 쓰고 말하는 의사소통, 양적 문해력, 정보 문해력, 팀워크와 문제해결이다.

- 소통할 수 있다.
- 많은 학생들이 대학에서 고도의 수학기론을 배우지는 않지만, 모든 학생들은 간단한 수학적 도구를 사용하여 이치를 따질 수 있어야 한다. 즉 수를 이해하고, 해석하고, 비평하고, 결론을 도출하는 등 대학 졸업자들은 현대 사회가 쏟아내는 엄청난 양적 자료를 활용할 수 있어야 한다. “사고의 습관”은 양적 자료를 모으고 합리적 추론 과정을 거쳐 결론에 다다른 능력을 기르는 과정이다. 전공과 관계없이 급변하는 21세기를 살아야 할 학생들에게 대학은 양적추론 능력을 배양할 수 있는 기회를 제공해야 한다.
 - 양적추론은 데이터를 이용하여 문제를 해결하는 과정에서 수식, 도표, 통계결과 등을 해석하여 판단의 기초로 활용할 수 있는 능력을 함양하고 이를 통해 논리적 사고와 추론 능력을 개발하는 것이다. 양적추론은 양적 자료를 기반으로 하는 의사소통과 정보 사용능력, 그리고 이를 통한 비판적 사고 등 모든 학생들이 습득해야 할 가장 중요한 지적 능력 중 하나이다. 이것이 데이터화(datafication)된 사회에서 필요로 하는 기초 역량이며, 대학 교양의 기초교육에서 양적추론을 지원해야 하는 이유이다.
 - 한국교양기초교육원은 우리나라 대학에 교양교육으로서 양적추론 프로그램을 확산하고, 이에 필요한 학습자료를 개발하고자 단기 집중과정으로 이 연구를 기획하고 태스크포스(TF)를 구성하였다.

2) 연구의 목적 및 방법

- 이 연구의 목적은 양적추론 프로그램을 대학의 교양기초교육으로 확산하기 위하여 학문 분야별, 수준별로 양적추론 학습자료를 개발하는 것이다. 이를 위해서 경제학, 수학, 물리학, 생물학, 식품영양학을 전공한 교수진을 중심으로 태스크포스(TF)를 구성하였고, 구성원은 양적추론의 개념과 활용 방법을 공유하고, 핵심주제를 중심으로 서로의 의견을 교류하였다.
- 양적추론 학습자료 개발을 위해 진행한 구체적인 연구 방법은 다음과 같다.
 - ① TF 구성원은 양적추론의 개념을 이해하기 위해서 한국교양기초교육원의 2021년 교·강사 연수 프로그램이 제공하고 있는 양적추론 입문과정의 두 개 강좌, ‘양적추론 I’과 ‘양적추론 II’ 강의를 수강하였고, 발표와 토론 과정을 통해 양적추론을 해석하였다.
 - ② 양적추론에 관한 문헌조사와 선행연구를 통해 양적추론의 학습목표와 학습내용 등을 논의하고, 이 과정에서 양적추론에 필요한 기초수학과 통계, 그리고 양적추론 학습의 기본 구조, 학습방법 등을 이해하였다.
 - ③ 양적추론 학습자료 개발을 위해서 먼저 미국 대학에서 사용하고 있는 양적추론 교과서를 중심으로 분야별 주제를 공동 학습하고, 연구위원별로 3가지 이상의 양적추론 주제를 선별하였다.

④ 발표와 토론 과정을 거쳐서 분야별 수준별로 적절한 주제를 발굴하고, 양적추론의 기본 구조에 맞춰서 기본적인 학습자료를 개발하였다.

- 워크숍을 통해서 개발된 학습자료를 검토하고, 보완하고 추가할 내용을 논의하였으며, 양적추론 프로그램 확산 방안을 토론했다. 이 연구는 차년도 양적추론 프로그램의 연구개발 확대를 위한 기반을 마련하였다.

2 연구 목표

- 양적추론 학습자료 개발을 위한 연구의 목표는 다음과 같다.
- 양적추론은 비판적 사고를 기반으로 기초수학 및 통계학을 이용하여 인위적으로 조작된 데이터가 아닌, 일상에서 발생하는 실제 데이터를 해석하고 결론을 도출하며, 학제적 맥락 안에서 문제를 해결하는 과정을 의미한다. 이를 학습자료로 개발하기 위해서 단기 집중 과정을 통해서 양적추론 학습자료를 위원별로 1개 이상 개발한다.
- 양적추론은 학생들의 전공과 관계없이 비판적 사고를 기반으로 데이터를 정확히 이해하고 이를 활용하여 의사결정을 할 수 있도록 양적 자료를 통해 배워야 하는 기본적인 능력이다. 모든 학생들이 양적추론 능력을 개발할 수 있도록 학습자료를 초급, 중급, 고급 3가지 수준별로 나누어 개발한다.
- 건강, 경제, 정치, 과학, 공학, 사회과학, 예술 및 문학에까지 다양한 분야의 학제적 맥락에서 학생들은 양적추론을 통해 합리적이고 민주적인 의사결정을 할 수 있어야 한다. 이를 교육하기 위한 학습자료 개발이 시급하다. 양적추론 학습자료는 경제 및 사회, 과학 및 응용, 보건 및 환경, 역사 및 문화 등 4개 분야로 구분하고, 분야별로 1개 이상 개발한다.

3 연구 개요

사업명	• 사업관리위원회 운영 (교양교육정책개발위원회 - 양적추론 TF팀)
연구 주제	• 모든 학생을 위한 양적추론(Quantitative Reasoning) 프로그램 개발 방안 연구 (1차 연도)
연구 기간	• 2021년 10월 ~ 2021년 12월 (약 2개월)
추진 주체	• 한국대학교육협의회 한국교양기초교육원
연구 목적	• 양적추론 프로그램을 대학의 교양기초교육으로 확산하기 위하여 학문 분야별, 수준별로 양적추론 학습자료를 개발하고, 차기 연도의 연구개발 확대를 위한 기반을 마련한다.
최종 목표	• 4개 분야별, 3개 수준별로 양적추론 학습자료를 개발한다.
주요 내용	<ul style="list-style-type: none"> • 국내·외 양적추론 프로그램 개설 및 운영 현황을 조사한다. <ul style="list-style-type: none"> - 국내 수도권 10개 대학을 조사한다. - 미국 7개 대학을 조사한다. • 양적추론의 개념을 이해한다. <ul style="list-style-type: none"> - 질적인 관점과 양적인 관점을 비교한다. • 데이터 리터러시를 이해한다. <ul style="list-style-type: none"> - 해외 대학의 데이터 리터러시 프로그램 사례를 조사한다. - 양적추론과 데이터 리터러시를 비교한다. • 양적 데이터 처리에 필요한 기본 개념을 조사한다. <ul style="list-style-type: none"> - 측정과 데이터: 차원분석, 크기의 정도, 유효숫자, 오차의 불확실성 등 - 모델과 가정: 모델 만들기, 가정과 맥락 - 페르미 추정 • 양적추론 학습자료 개발에 필요한 아이디어를 공유한다. <ul style="list-style-type: none"> - 교수자를 위한 양적추론 학습자료 개발 방법을 찾는다. - 데이터 수집과 수집된 데이터와 관련된 학습자료를 개발한다. • 양적추론에 필요한 기초수학 및 통계를 이해한다. <ul style="list-style-type: none"> - 수리력, 산술, 대수, 기하, 함수, 확률, 통계 등을 이해한다. - 단위를 강조한다. • 양적추론을 학습하는 단계별 기본 구조를 이해한다. • 4개 분야별 양적추론 학습자료를 개발한다. <ul style="list-style-type: none"> - 4개 분야는 경제 및 사회, 과학과 응용, 보건과 환경, 역사와 문화이다. • 초급, 중급, 고급 3개 수준별로 양적추론 학습자료를 개발한다. • 워크숍을 개최하여, 개발된 양적추론 학습자료를 평가하고 수정 보완한다. • 이 연구는 차기 연도 양적추론 프로그램 연구개발 확대에 필요한 기반을 마련한다.

II

국내·외 대학 현황 분석

- | | |
|----------|----|
| 1. 국내 현황 | 9 |
| 2. 해외 현황 | 17 |



II. 국내·외 대학 현황 분석

1. 국내 현황

- 한국교양기초교육원의 교양교육표준안에 따르면 교양·기초 교육과정을 편성함에 있어 그 하위 영역을 크게 기초교육, 교양교육(배분이수), 소양교육으로 구분한다. 기초교육이란 대학교육을 받기 위한 기초지식 및 기본적인 지적 언어적 능력을 함양하는 교육을 가리킨다. 기본적으로 논리적 비판적 사고교육, 문헌 독해 및 의사소통을 위한 언어교육(국어 및 외국어), 자연의 세계 이해를 위한 수학 및 기초과학 교육, 디지털 문명의 자료·정보(Software)를 해독할 수 있는 정보문해능력 교육 등이 포함된다. 이 영역에 속하는 교과목들은 대체로 1학년 학생들을 대상으로 필수적으로 이수하도록 규정하고 있다.
- 최근 4차 산업혁명 시대를 맞아 인문학적 통찰뿐만 아니라 과학적 탐구 방법과 문제 해결 능력, 여러 학문 분야의 융복합 능력을 함양한 새로운 인재상이 강조되면서 대학 교육의 패러다임이 변하고 있다. 가장 두드러진 변화는 현장 중심의 문제해결 능력을 갖춘 인재양성을 위해 SW교육이 교양에서 강조되고 있고, AI교육도 인공지능시대의 핵심역량으로 간주하고 있다.
- 이 연구의 조사 대상인 국내 수도권 10개 대학 중 6개 대학(건국대학교, 고려대학교, 서강대학교, 서울대학교, 성균관대학교, 중앙대학교)은 기초교육에 교양필수로 SW교육 관련 교과목을 개설 운영하고 있다. 사실 SW교육이 의미를 가지려면, SW교육의 근간이 되는 수학적 사고와 비판적 사고를 기반으로 정량적 정보를 이해·분석하고 합리성과 비합리성을 구분하는 양적추론 역량이 중요하다. 그러나 국내 대학들은 문제를 탐구하는데 필요한 비판적 사고와 이를 통한 합리적인 의사결정을 할 수 있는 양적추론 역량은 대부분 간과하고 있다.

1) 국내 대학의 양적추론 프로그램 개설 현황

- 기초학문분야를 갖추고 있는 수도권 10개 대학을 대상으로 교양·기초 교육과정에서의 양적추론 교과목 개설 현황을 조사하였다. 양적추론 교과목 개설 여부는 교과목명과 개요를 기준으로 판단하였고 이를 <표 1>에 제시하였다. 서울대학교의 경우 '학문의 기초' 영역 내에 '수량적 분석과 추론' 소영역이 있고 이 안에 양적추론 교과목이 개설되어 있다. 건국대학교, 경희대학교, 고려대학교, 서울대학교, 연세대학교, 이화여자대학교, 중앙대학교는 교양교육(배분이수)의 주제별(학문분야별) 소영역 안에 일부 양적추론 교과목을 개설하고 있다. 성균

관대학교도 최근에 균형교양의 자연/과학/기술 영역에 개설된 ‘인공지능을 위한 기초수학’을 개설하였다.¹⁾

〈표 1〉 수도권 10개 대학의 교양·기초 교육과정과 양적추론(QR) 교과목 편성 현황

대학	기초교육(교양필수)		이수학점	교양교육(배분이수)	
	영역	소영역(필수이수학점)		영역/소영역	QR 교과목
건국대학교 (상허 교양대학)	기초교양	<ul style="list-style-type: none"> • 외국어(3) • 글쓰기(3) • 취·창업(2) • S/W(6) • 인성(1) 	15	심화교양/ 사고력증진	<ul style="list-style-type: none"> • 통계학의이해 • 빅데이터와소비자만족 • 엑셀과통계를통해한국사회 • 정보통계학
경희대학교 (후마니타스 칼리지)	문명전개의 지구적 문맥	<ul style="list-style-type: none"> • 인간의가치탐색(3) • 세계와시민(3) • 빅뱅에서문명까지(3) 	17	배분이수 교과/논리,분석, 수량세계	<ul style="list-style-type: none"> • 예측하는미래:통계와확률 • 정량적추론분석 • 컴퓨터를만든수학:수학과정보기술 • 통계의진실과오류
	글쓰기	<ul style="list-style-type: none"> • 성찰과표현(3) • 주제연구(3) 			
	영어	<ul style="list-style-type: none"> • 대학영어(3) 			
고려대학교 (교양 교육원)	공동교양	<ul style="list-style-type: none"> • 자유정의진리(6) • 글쓰기(2) • Academic English(2) • 1학년세미나(2) • 정보적사고(1) 	13	핵심교양/ 정량적사고	<ul style="list-style-type: none"> • 수리과학의방법론 • 인문사회학을위한수학 • 계량의사결정론 • 양적유전학 • 데이터로표현하는세상 • 경제학을위한과학적계산 • 빅데이터분석과해석
서강대학교 (전인 교육원)	공동필수	<ul style="list-style-type: none"> • 서강인성(1) • 글쓰기(3) • 글로벌언어 I(3) • 소프트웨어(3) • 전공진로탐색(1) 	11	공동선택/ 인간과학	
서울대학교 (기초 교육원)	학문의 기초	<ul style="list-style-type: none"> • 사고와표현(4~7) • 외국어(4~9) • 수량적분석과추론(3~16)* • 과학적사고와실험(4~16) • 컴퓨터와정보활용(2~3) 	8~ 41	학문의세계/자 연과기술	<ul style="list-style-type: none"> • 정보사회와수학 • 불확실성의세계와통계학
성균관 대학교 (학부대학)	성균중점	<ul style="list-style-type: none"> • 성균인성·리더십(2) • 고전·명저(3) • 의사소통(4) • 창의(3) • 글로벌(6) 	18	균형교양/ 자연·과학·기술	<ul style="list-style-type: none"> • 인공지능을위한기초수학
연세대학교 (학부대학)	교양기초	<ul style="list-style-type: none"> • 채플(2) • 기독교의이해(3) • 글쓰기(3) • 대학영어(4) 	12	대학교양/ 논리와수리	<ul style="list-style-type: none"> • 통계학입문 • 인문사회수학 • 수학과금융사회 • 수학과생명과학 • 대칭으로보는세상

1) https://www.skku.ac.kr/_res/skku/etc/y2020_2.pdf

대학	기초교육(교양필수)		이수학점	교양교육(배분이수)	
	영역	소영역(필수이수학점)		영역/소영역	QR 교과목
					<ul style="list-style-type: none"> 게임전략과금융공학 숫자와생활 빅데이터와지식탐사
이화여자 대학교 (호크마 교양대학)	이화 진선미	<ul style="list-style-type: none"> 기독교와세계(3) 나눔리더십(2) 	20(인문, 사회계열) 12~13 (자연예체 능계열)	창의융복합/ 융복합교양	<ul style="list-style-type: none"> 글로벌사회의기록과정보 빅데이터사회와정보활용 정보사회와통계
	사고와 표현	<ul style="list-style-type: none"> 우리말과글쓰기(3) 고전읽기와글쓰기(2) 			
	글로벌 의사소통	<ul style="list-style-type: none"> 대학영어(3) 고급영어(3) 제2외국어(2) 제2외국어II(2) 		창의융복합/ 융합기초	<ul style="list-style-type: none"> 계산의기초와융합적문제해결 과학자를위한기초현대통계학론
중앙대학교 (다빈치 교양대학)	공통교양	<ul style="list-style-type: none"> 글쓰기(2) 창의와소통(2) 앙트레프레너십시대의회계(2) 컴퓨팅적사고와문제해결 (비공학계열)(2) 또는 디자인적사고와문제해결 (공학계열)(2) Communication in English(2) ACT(2) 한국사(2) 	14	핵심교양/ 융합	<ul style="list-style-type: none"> 수학의세계 통계와사회
한양대학교 (창의융합교 육원)	공통기초	<ul style="list-style-type: none"> 말과글(3) 전문학술영어(3) 과학기술의철학적이해(3) 커리어개발 I(1) 커리어개발 II(1) 휴먼리더십(HELP1)(2) 글로벌리더십(HELP2)(2) 비즈니스리더십(HELP3)(2) 셀프리더십(HELP4)(2) 	19	핵심역량 교양/ 과학과기술	

* 서울대학교 '학문의 기초' 영역의 '수량적 분석과 추론' 소영역 내 QR 교과목은 생명과학을 위한 수학 1,2, 경영학을 위한 수학, 인문사회계를 위한 수학 1,2, 수학의 기초와 응용 1, 통계학, 통계학 실험, 통계학의 개념 및 실습 등이 있다.

- <표 1>에 제시된 바와 같이 조사대상인 수도권 10개 대학은 교양의 기초교육에서 글쓰기와 외국어 같은 언어교육에 치중하고 있고, 서울대학교를 제외한 9개 대학은 기초교육에서 수학과 기초과학 교육을 거의 다루고 있지 않다. 서강대학교와 한양대학교를 제외한 8개 대학은 교양교육(배분이수)에 양적추론 교과목을 개설하고 있지만 대부분 필수가 아닌 선택 과목이다.
- 교양의 기초교육에 양적추론 교과목을 개설한 서울대학교의 기초교육 교과과정과, 2021년에 교육과정을 일부 개편한 성균관대학교를 먼저 살펴본 후, 교양교육(배분이수)에 양적추론 교과목을 개설하고 있는 7개 대학(건국대학교, 경희대학교, 고려대학교, 서울대학교, 연세대학교, 이화여자대학교, 중앙대학교)의 교양교육 교과과정을 이수기준과 함께 살펴보고자 한다.

(1) 서울대학교 교양교육의 양적추론 개설 현황²⁾

- 서울대학교 기초교육원의 교양·기초 교육과정은 크게 ‘학문의 기초’, ‘학문의 세계’, ‘선택교양의 3개 영역으로 편성되어 있다. 기초교양에 해당하는 ‘학문의 기초’는 대학에서 학문수행을 하는데 공통적으로 요구되며, 학사과정 이후의 활동에서도 지속적으로 활용하게 될 기본적인 능력을 함양하는 교과영역으로 5개의 소영역(사고와 표현, 외국어, 수량적 분석과 추론, 과학적 사고와 실험, 컴퓨터와 정보활동)으로 구성되어 있다. 모국어와 외국어의 말과 글을 통하여 비판적으로 사유하고 정연하게 표현하는 능력을 배양하는 교과목, 학문적 논의에서 요구되는 엄격한 수리 통계적 분석과 추론능력을 함양하는 교과목, 과학적 기초지식을 연마하고 실험실습 방법을 체득하는 기초과학분야 교과목, 그리고 컴퓨터를 활용한 정보처리의 원리와 적용방법을 이해하는 교과목을 포함한다.³⁾
- ‘수량적 분석과 추론’ 소영역은 수학적 개념과 원리를 이해하고 문제를 해결하는 과정을 통하여 논리적 사고와 추론하는 능력 및 직관을 개발하여 수식, 도표 통계결과 등을 해석하여 판단의 기초로 활용할 수 있는 능력을 함양하는 것을 목적으로 하는 교과 영역이다. 여기에 개설된 21개의 교과목 중 비이공계 학생들을 위한 경영학을 위한 수학, 인문사회계를 위한 수학 1,2, 생명과학을 위한 수학 1,2, 수학의 기초와 응용 1, 통계학, 통계학 실험, 통계학의 개념 및 실습 등을 양적추론 교과목으로 볼 수 있다.
- 인문대학, 사회과학대학, 사범대학(이공계 제외)은 ‘학문의 기초’ 영역에서 ‘사고와 표현’, ‘외국어’ 영역 내 필수과목만 이수하면 되므로, ‘수량적 분석과 추론’ 영역을 이수하지 않아도 된다. 경영대학의 경우 ‘학문의 기초’ 영역에서 ‘사고와 표현’, ‘외국어’ 뿐만 아니라 ‘수량적 분석과 추론’, ‘컴퓨터와 정보 활용’ 영역 내 필수과목을 이수해야 하고, ‘수량적 분석과 추론’ 소영역에서는 경영학을 위한 수학(3학점), 통계학(3학점), 통계학 실험(1학점) 7학점을 필수로 이수해야 한다. 생활과학대학(소비자아동학부 소비자학전공, 식품영양학과, 의류학과)은 ‘학문의 기초’ 영역에서 ‘사고와 표현’, ‘외국어’ ‘수량적 분석과 추론’ 영역을 이수해야 하고, ‘수량적 분석과 추론’ 소영역에서는 통계학(3학점), 통계학 실험(1학점) 4학점 필수이수하거나(소비자아동학부 소비자학전공), 이 교과목과 함께 생명과학을 위한 수학 1(3학점) 또는 물리학/생물학(3학점), 물리학/생물학 실험(1학점)까지 7(8)학점을 필수로 이수해야 한다(식품영양학과, 의류학과). 자연과학대학, 공과대학, 사범대학(수학교육과, 과학교육계)은 ‘학문의 기초’ 영역에 있는 5개의 소영역(사고와 표현, 외국어, 수량적 분석과 추론, 과학적 사고와 실험, 컴퓨터와 정보활동) 모두에서 학과가 지정하거나 권장하는 교과목을 선택적 필수로

2) <http://liberaledu.snu.ac.kr/>

3) http://liberaledu.snu.ac.kr/index.php?hCode=EDCT_LIST&idx=116

- 이수해야 한다.⁴⁾
- 결과적으로 서울대학교 교양의 기초교육(학문의 기초)에서 ‘사고와 표현’ 및 ‘외국어’ 소영역은 전공과 관계없이 모든 학생들이 수강하는 교양필수인 반면에 ‘수량적 분석과 추론’ 소영역은 ‘과학적 사고와 실험’, ‘컴퓨터와 정보활동’ 소영역과 같이 전공 학업을 위한 기초교육의 역할을 하고 있다. 따라서 비이공계 대학 학생 대부분은 ‘수량적 분석과 추론’ 소영역에 개설된 양적추론 교과목을 수강하지 않아도 된다.

(2) 성균관대학교 교양교육의 양적추론 개설 현황⁵⁾

- 성균관대학교는 2021학년도에 교육과정을 일부 개편하여 데이터 사이언스 영역을 신설했다. 그래서 학사 교육과정의 과목을 성균교양(중점, 균형)과목, DS(Data Science)과목, 전공과목, 선택과목으로 구분했다. 중점교양에 있던 미래(SW/AI) 영역을 분리하고, 3과목(데이터분석기초, 머신러닝의 기초, AI캡스톤프로젝트)을 추가하여 교양, 전공, 선택 이외에 별도의 교육과정인 DS(Data Science) 교육과정을 신설했다.⁶⁾
- 개편 전 교양교육과정은 기초교육에 해당하는 중점교양과 교양교육에 해당하는 균형교양, 그리고 소양교육에 해당하는 성균인성으로 나뉘어져 있었지만, 2021학년도 교육과정개편에 따라 성균인성·리더십을 중점교양에 포함하였다. 개편 후 성균교양(중점, 균형)과목은 중점교양과 균형교양으로 구성되어 있으며, 중점교양에는 성균인성·리더십, 고전·명저, 의사소통, 창의, 글로벌 영역이 있고 균형교양은 인간/문화, 사회/역사, 자연/과학/기술, 인문사회과학기반/자연과학기반 등의 영역으로 구성되어 있다. 학번/학과별로 이수 기준이 상이하다. 선택과목은 운동, 취·창업, 자격증 취득 등 특정한 목적을 위해 이수하는 과목을 말하며 목적에 따라 교직과목, 평생교육사과목, 군사학과목, 일반선택과목으로 구분하고 있다.
- 중점교양의 창의영역은 논리적, 비판적, 창의적 사고를 통한 문제해결 능력 함양을 목표로 하고 있지만, 개설된 7개 과목 중에서 양적추론 과목으로 볼 수 있는 과목을 찾기가 어렵고, 균형교양(배분이수)의 자연/과학/기술 영역에 개설된 43개 과목 중에서 ‘인공지능을 위한 기초수학’을 양적추론 과목으로 볼 수 있다.⁷⁾
- DS(Data Science)과목은 SW와 AI분야에 대한 창의융복합 교육을 강화하기 위한 과목으로 DS기반과 DS심화 영역으로 나뉘어 있다. 2021학년도 입학생부터 DS기반 영역의 ‘AI기초와 활용’, ‘데이터분석기초’ 교과목은 전교생이 필수적으로 이수하여야 한다. DS과목은 <표 2>

4) <https://liberaledu.snu.ac.kr/node/61>

5) file:///C:/Users/User/Downloads/2021_p7.pdf

6) https://www.skku.edu/_res/skku/etc/y200121_1.pdf

7) 성균관대학교 중점교양의 창의영역에 있는 7개 교과목은 창의적사고, 창의와사유의기초, 창의적발상, 창의와소프트웨어, 사고와표현, 창의와컴퓨팅사고, 창의적융합디자인이다. https://www.skku.ac.kr/_res/skku/etc/y2020_2.pdf

에서 확인할 수 있다.

- 2021학년도 교육과정개편의 가장 큰 특징은 별도의 교육과정으로 데이터 사이언스(DS) 영역을 두면서 모든 학생들이 두 과목 5학점을 필수로 이수하도록 하였으며, 균형교양 영역에서 3학점을 축소하였다. 즉 DS 교육과정 운영에 따라 학생들의 학습 부담을 추가하지는 않았지만, 결국 균형교양에 개설된 자연/과학/기술 영역을 학생들이 충분히 외면할 수 있다는 것과 교양학점이 축소되었다는 것이다.

〈표 2〉 2021학번 DS교육과정 학점 이수표

영역	교과목명	학점	이수계열
DS기반 (필수)	컴퓨팅사고와 SW코딩	2	인사캠 전체, 자연과학계열, 건축학계열, 스포츠과학계열, 의학계열
	문제해결과 알고리즘	2	
	공학컴퓨터 프로그래밍	3	이공계열
	프로그래밍 기초와 실습	3	
	시기초와 활용	2	전체
	데이터 분석기초(신규)	3	
	필수소계	9 or 11	
DS심화 (선택)	머신러닝의 기초(신규)	3	이수시 新3품 시인증 과목으로 인정
	시캡스톤 프로젝트(신규)	3	

(3) 국내 대학의 양적추론 개설 현황⁸⁾

- 수도권 10개 대학에서 교과목명과 개요를 기준으로 양적추론 교과목의 개설 현황을 조사한 결과, 8개 대학(건국대학교, 경희대학교, 고려대학교, 서울대학교, 성균관대학교, 연세대학교, 이화여자대학교, 중앙대학교)에서는 교양교육(배분이수) 영역에 양적추론 교과목을 개설하고 있다. 8개 대학의 교양교육 이수기준을 〈표 3〉에 정리하였다.

8) 건국대학교 <https://bulletins.konkuk.ac.kr/ko-KR/>
 경희대학교 <http://hc.khu.ac.kr/v2/02/02.php>
 고려대학교 <https://ge.korea.ac.kr/ge/about/core.do>
 서울대학교 <https://liberaledu.snu.ac.kr/node/61>
 연세대학교 http://universitycollege.yonsei.ac.kr/fresh/refinement/course_basic.do
 이화여자대학교 <http://www.ewha.ac.kr/ewha/bachelor/curriculum.do>
 중앙대학교 http://ge.cau.ac.kr/course_basic.php

〈표 3〉 양적추론(QR) 교과목이 개설되어 있는 7개 대학의 교양교육 이수기준

대학	교양교육 주제별(학문분야별) 소영역 이수기준		주제별(학문분야별) 소영역/ QR 교과목수(개)	
	이수기준			
건국대학교	3개 소영역에서 각 2과목 이수		12	사고력증진/4
경희대학교	7개 소영역 중 4개 소영역에서 각 1과목 이수		12	논리,분석,수량세계/4
고려대학교	7개 소영역에서 2과목 이수, 단 인문학 영역(4개 소영역) 1개 필수		6	정량적사고/7
서울대학교	인문대학	7개 소영역 중 4개 소영역 이상에서 5과목 이수, 단, 인문분야(3)에서 권장과목 중 1과목 필수	15	자연과기술/2
	사회과학·경영대학	7개 소영역 중 4개 소영역에서 각 1과목 이수, 단 자연과학분야(2) 1과목 필수	12	
	자연과학·공과대학	인문·사회분야 5개 소영역 중 4개 소영역에서 각 1과목 이수, 단, 인문분야(3)에서 권장과목 중 1과목 필수	12	
성균관대학교	3개 소영역에서 각 1과목 이수		9	자연·과학·기술/1
연세대학교	문과·상경·경영·사회과학대학	10개 소영역에서 8과목 이수	24	논리와수리/8
	이과대학	• 인문·사회분야 7개 소영역에서 5과목 이수 • 자연과학분야 3개 소영역에서 6과목 이수	33	
	공과대학	• 인문·사회분야 7개 소영역에서 5과목 이수 • '논리와수리'에서 2~5과목 이수 • 자연과학분야 2개 소영역에서 2~4과목 이수	27~42	
이화여자대학교	인문·사회·경영·자연대학	5개 소영역 중 4개 소영역에서 각 1과목 이수	12	융복합교양/3
	엘텍공과대학	5개 소영역 중 3개 소영역에서 각 1과목 이수	9	
중앙대학교	19개 과목 중 1과목 이수		3	융합기초/2
	5개 소영역에서 각 1과목 이수		15	융합/2

- 〈표 3〉에 제시된 바와 같이 8개 대학에서는 교양교육(배분이수) 영역에 양적추론 교과목을 개설하고 있으나, 개설된 교과목수가 적고 선택과목이므로 이공계를 제외한 학생들의 수강률이 높지 않을 것이다. 그리고 고려대학교, 서울대학교, 연세대학교의 이수기준에 따르면 이공계 학생들에게 반드시 교양교육 영역 중 인문분야에서 1과목 이상을 수강하도록 규정하고 있으나, 인문계 학생들은 자연과학분야의 과목을 수강하지 않아도 졸업할 수 있다.
- 기초학문분야가 있는 수도권 10개 대학교를 대상으로 교과목명과 개요를 기준으로 교양·기초 교육과정에서 양적추론 교과목 개설 현황과 이수기준을 조사한 결과를 요약하면 다음과 같다. 서울대학교는 유일하게 기초교육 영역에 ‘수량적 분석과 추론’이라는 양적추론 소영역을 두고 교과목을 개설하고 있다. 그러나 이수기준에 따르면 비이공계의 경우 경영대학과 일부 생활과학대학 학생들만이 양적추론 교과목을 교양필수 또는 교양선택으로 수강하도록

권유하고 있으며, 대부분 이공계 학생들은 전공 학업을 위한 기초교육으로 양적추론 교과목을 수강하고 있다.

- 건국대학교, 경희대학교, 고려대학교, 서울대학교, 성균관대학교, 연세대학교, 이화여자대학교, 중앙대학교 등 8개 대학은 교양교육(배분이수) 영역의 주제별(학문분야별) 소영역 안에 양적추론 교과목을 개설하고 있다. 그러나 대학별 이수기준을 적용해 보면 학생들이 양적추론 교과목을 수강할 확률은 대부분 낮은 것으로 나타났다. 서강대학교와 한양대학교는 교양·기초 교육과정에 양적추론 소영역이나 교과목을 개설하지 않고 있다.
- 대학 교양의 기초교육은 대학교육을 받기 위한 기초지식 및 기본적인 지적 언어적 능력을 함양하는 교육이며 수학 및 기초과학 교육도 포함된다. 수도권 10개 대학 모두 글쓰기와 외국어 영역을 교양필수로 지정하고 있고, 그중 6개 대학은 SW교육도 필수과목으로 두고 있다. 그러나 양적추론 교과목이 개설되어 있는 8개 대학에서 살펴본 양적추론 교육은 전공과 관계 없이 모든 학생들이 수강해야 하는 필수과목이 아니다. 소수의 양적추론 교과목이 선택과목으로 개설되어 있어, 학생들에게 충분한 학습의 기회를 제공하지 못하고 있다. 기초교육으로서 양적추론 교육의 목적은 추론과 문제해결에 필요한 비판적 사고 능력과 추론의 절차를 체득하는 것이다. 즉 추상적 원리와 이론을 구체적인 문제에 적용시키는 능력을 함양하고, 양적 자료와 증거에 대한 평가를 통해 의사결정을 하며, 추론 및 증거에 기반하지 않는 문제를 파악하는 방법을 배움으로서 추론과정에서 발생하는 오류와 일반적인 위험을 피하는 방법을 체득하는 것이다.⁹⁾

2) 한국교양기초교육원의 역할

- 2011년에 설립된 한국교양기초교육원(교기원)은 보편 지성교육으로서의 교양교육의 중요성을 공감·홍보하고 바람직한 방향을 제시하는 “교양교육혁신의 플랫폼” 역할을 하고 있다. 교양교육의 목표는 여러 영역의 기초 지식을 쌓고 다양한 능력을 배양하여 인식을 확장하고 사유의 지평을 넓이는 것이기 때문에, 우리가 직면한 다양한 문제들을 총체적으로 조망하고 종합해 판단할 수 있는 힘을 키워주고, 여러 난제들을 해결할 수 있도록 한다.¹⁰⁾
- 교기원의 주요사업은 교양교육 연구개발, 교양교육 컨설팅, 교원역량 강화, 우수모델 확산 등 4개 분야로 범주화할 수 있다. 연구개발 사업은 2011년도부터 꾸준히 진행된 사업이다. 이 사업은 교육과정, 교과목 개발, 교수-학습, 성과평가 관련 연구, 교양교육 정책 관련 연구 등 크게 5개 주제군으로 나뉜다.
- 교양교육 컨설팅 사업은 교양교육의 질과 학교 구성원들의 교양교육 역량 제고를 위해 대학

9) 최병문, (2017). *한국형 리버럴아츠칼리지 모델 개발을 위한 연구*, 한국교양기초교육원 보고서, RR-2017-8654호.

10) <https://www.konige.kr/konige/greet.php>

- (총장, 기관 등)의 요청에 부응하여 교육과정 개선, 교육내용 심화, 교육역량 제고, 교육활동 지원 등 대학 교양교육이 당면한 내적·외적 과제들을 스스로 해결할 수 있도록 학내 전문가 및 외부 전문가들이 함께 문제를 진단하여 새로운 대안을 탐색하고 실행하도록 도와주는 자문 활동이다.
- 교기원은 대학 교양교육 정상화를 위한 교육과정 구성 및 조직 운영에 어려움을 겪는 교양교육 전담 기관장을 대상으로 워크숍을 개최하고 있다. 또한 대학현장에서 교양교육을 담당하고 있는 교·강사의 교수능력 향상 및 역량강화를 위한 연수 프로그램을 기획하고 운영하고 있다. 그 외에 국제교양교육포럼, 전국대학생교양콘테스트, e-저널 두루내 등 교양교육의 우수모델을 확산하기 위해서 여러 사업을 진행하고 있다.
 - 교기원은 교원역량 강화 사업의 일환으로 ‘교양기초교육 교·강사 온라인 교육 플랫폼’을 운영하고 있다. 2021년 진행된 교양기초교육 교·강사 연수 프로그램에서 ‘기초교육 영역의 교양 교육’ 분야로 분류된 양적추론 강좌는 8월11일부터 11월30일까지 약 80일간 무료로 개설되었다. 새로 개설된 두 개의 양적추론 강좌는 ‘양적추론I: 개념과 내용’과 ‘양적추론II: 과제수행사례’이며, 전국의 교·강사들에게 ‘모든 학생들을 위한 교양의 기초교육으로서 양적추론’을 소개하였다.¹¹⁾
 - 교기원은 교·강사 온라인 교육에서 활용된 모든 발표자료를 교기원 홈페이지에 게시하여 교·강사들에게 학습 정보를 제공하고 있다.

2 해외 현황

- 미국 대학은 대부분 교양교육과정에 다양한 학문 영역을 편성하고 전공과 상관없이 모든 학생들이 의무적으로 영역별 교과목을 이수하도록 규정하고 있다. 박진희 외(2017)의 연구에 따르면 다수의 대학들이 General Education의 영역별 의무 이수 항목에서 물리과학과 생명과학 영역에서 각각 1과목 이상을 의무적으로 이수하도록 하고 있다.¹²⁾
- 미국 대학은 정보와 데이터 시대의 특성을 반영하여 기초과학 교과목과 정량적 사고 교과목을 핵심교양 과목으로 규정하여 기초교육 영역 내의 공통 교과목으로 개설하고 모든 학생들이 의무적으로 이수하도록 규정하고 있다. 미국식 학부대학(University College), 리버럴아츠칼리지(Liberal Arts College), 그리고 커뮤니티칼리지(Community College)에서도 기초과학 교과목 이수 의무화와 정량적 사고 교과목 이수 의무화를 적용하고 있다. 이는 대학들이

11) <https://www.edukonige.kr/>

12) 박진희, 강운재, 손향구, 이관수, (2017). *대학 교양 과학교육의 범위와 과제*, 한국교양기초교육원 보고서, RR-2017-9-655호.

교양교육을 통해 학문과 사회에서 요구하는 필수 능력을 함양하도록 교수·학습하는데 중점을 두기 때문이다.

1) 미국대학협의회(Association of American Colleges & Universities, AAC&U)의 역할¹³⁾

- 1915년에 설립된 AAC&U의 임무는 민주주의에 봉사하는 학부 교육의 토대를 질과 형평성 (quality and equity)을 만족하도록 만듦으로써, 교양 교육의 활력과 공적 위상을 높이는 것이라고 밝히고 있다. AAC&U는 미국 대학의 교양교육과정이 일관성, 융통성, 다양성을 유지하면서 질과 형평성을 확보하도록 중심 역할을 하고 있다.
- AAC&U는 임무 달성을 위해서 다음과 같은 전략적 목표를 실행한다.
 - ① 학부교육의 질 향상을 위한 최고의 교수진 참여, 증거 기반, 지속 가능한 모델 및 전략
 - ② 학문적 우수성과 사회적 정의 실현을 위해 고등교육 전반에 걸쳐 형평성을 제고
 - ③ 직업, 생활, 글로벌 시민정신 및 민주주의를 위한 교양교육의 가치를 명확히 설명하고 입증하는 데 있어 기관과 커뮤니티를 선도
 - ④ 고등교육의 개혁을 촉진하여 교양교육의 근본적 측면으로 발견과 혁신을 강조
- 이와 같은 전략적 목표를 실행하기 위해서 세 가지 작업에 집중한다.
 - ① 고등교육 공동체 내에서 모범 사례의 개발을 지원하고, 교수 주도의 학생 학습 평가를 촉진하며, AAC&U 업무의 가치를 입증하는 증거 구축
 - ② 교수진과 리더십 계발을 강화하고, 효과적인 관행을 확인하고 적용하며, AAC&U 및 그 구성원의 목표를 달성하는 교육 개혁을 구현하여 역량을 확장
 - ③ 교수진, 학계 및 학생 지도자들, 학장 및 총장이 AAC&U의 사명을 옹호하고, 고품질의 교양교육 가치를 널리 알리는 데 도움이 되도록 자료와 명분을 제공

2) 미국 대학의 양적추론 프로그램 개설 현황

- 국내 대학의 교양교육 모델이 되고 있는 미국 우수 대학의 교양교육 목표와 이를 실현하기 위한 교양·기초 교육과정을 살펴보고, 양적추론 영역이 추구하는 목표와 이수체계를 통해 필수교양으로서 양적추론을 이해하고자 한다.

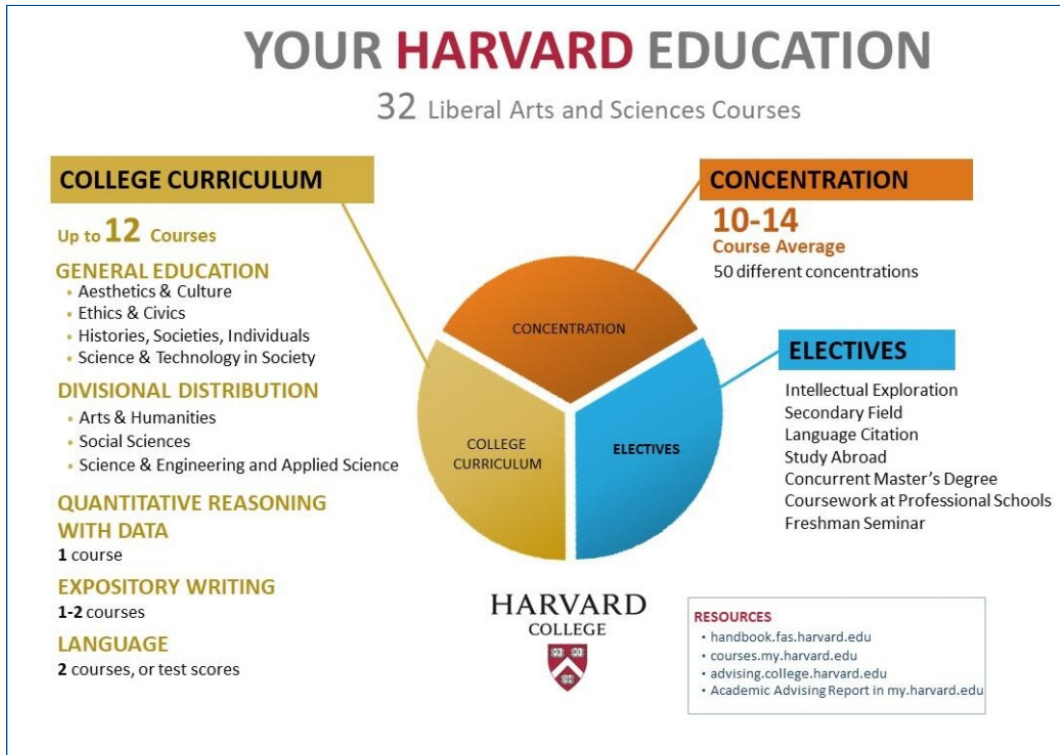
13) <https://www.aacu.org/about/strategicplan>

(1) 하버드대학교(Harvard University) 교양교육의 양적추론 개설 현황¹⁴⁾

- 미국 메사츄세츠주 케임브리지에 위치한 하버드대학교는 교양교육을 담당하는 학부 과정의 하버드칼리지(Harvard College)를 운영하고 있다. 하버드의 교양교육은 ‘대학의 학문을 삶과 연계하는 것’, ‘자유교육의 공적인 측면’을 지향한다. 즉, 교양교육의 목적은 문리(文理)분야에서 가르치는 기초학문이 어떻게 학생들의 삶과 연계되어 있으며, 자신들이 직면하게 될 세계와 어떤 관련이 있는지를 이해할 수 있도록 인도하는 것이다.
- 하버드대학교의 교육과정은 <그림 1>과 같이 교양(College Curriculum), 전공(Concentration), 선택(Electives)으로 나뉜다(2019년 기준).¹⁵⁾ 대학 교육과정의 1/3이 교양이며, 교양은 공통(필수)교양(General Education), 배분이수(Distribution), 데이터를 이용한 양적추론(Quantitative Reasoning with Data, QRD), 논증적 글쓰기(Expository Writing), 언어(Language) 등 5개의 영역으로 구분한다.
- 교양교육은 비판적으로 생각하고, 분석적으로 추론하고, 명확하게 쓰는 기초능력을 위해 광범위한 지적 기반을 제공한다. 이러한 능력은 학생들이 세계에서 가장 복잡한 문제를 탐색하고 예측하지 못한 도전으로 미래의 혁신을 다룰 수 있도록 한다. 토론과 창의적 아이디어에 의해 형성된 새로운 사고방식은 학생들이 더 큰 선(善)함을 위해 성실한 세계 시민으로서 의미 있는 삶을 영위할 수 있도록 준비시킨다.
- QRD 영역은 2019년 이전 교과과정의 ‘경험적·수학적 사고(Empirical & Mathematical Reasoning)’ 영역을 변경한 것이며, ‘삶의 문제와 연관된 주제별 교육’이라는 4개 영역의 공통교양(General Education)에서 분리되어, 별도 영역으로 필수화되었다. QRD는 학생들이 늘 직면하게 될 다양한 데이터에 대해 비판적으로 생각하는 방법을 가르치고, 학생들은 데이터를 이해하는 데 필요한 계산적, 수학적, 통계적 기법을 배운다.
- 하버드칼리지에서 제시한 교육목표에 따르면 학생들은 결함이 있고(imperfect), 불완전하며(incomplete), 때로는 변형되고(compromised), 항상 우연성(contingent)이 존재하는 현실 세계의 데이터를 어떻게 다루는지 그 기술과 사용 방법을 배우고, 데이터 사용 중 제기될 수 있는 많은 질문들 즉 사회적, 윤리적, 인식론적 질문을 다룬다.

14) <https://college.harvard.edu/academics/liberal-arts-sciences#harvard-college-curriculum>

15) <https://oue.fas.harvard.edu/college-curriculum>



[그림 1] 하버드대학교의 교육과정

- 신입생은 QRD 영역에서 1개의 교과목을 필수 이수해야 한다. QRD 교과목은 주로 천문학, 수학, 경제학, 정치학, 자연과학 분야에서 개설하고 있고, 학생들의 기초수학 수준이 다양하기 때문에 대학은 위원회를 통해서 다양한 수준의 수업을 제공하도록 노력하고 있다. QRD는 학생들이 기초학문의 탐구 분야에서 사용되는 데이터에 대해 비판적으로 생각할 수 있도록 수학, 통계 및 계산 방법을 소개하고 현실의 문제에 적용하도록 한다.
- 학교 홈페이지에 따르면 QRD 과정은 다음 기준을 충족해야 한다.¹⁶⁾
 - ① 학생들은 데이터를 분석하고, 추론을 하고, 질문에 답하기 위하여, 예측에 필요한 계산적, 수학적, 통계적 방법을 배워야 한다.
 - ② 학생들은 이러한 방법을 실제 데이터에 적용하는 방법을 배워야 한다.
 - ③ 학생들은 이런 방법의 한계(예: 대략적인 가정, 과적합(overfitting), 인과적 모호성 등의 역할)를 이해해야 한다.

16) <https://oue.fas.harvard.edu/quantitative-reasoning-data>

(2) 예일대학교(Yale University) 교양교육의 양적추론 개설 현황¹⁷⁾

- 미국 코네티컷주 뉴헤이븐에 위치한 아이비리그, 예일대학교는 교양교육을 담당하는 학부과정의 예일칼리지(Yale College)를 운영하고 있다. 예일칼리지의 교양교육은 지식에 대한 다양한 분야의 탐구 및 접근 방식에 대해 잘 알고 있도록 하고, 다양한 분야의 폭넓은 지식을 갖춘 인재 양성을 목표로 하고 있다.
- 예일칼리지의 교양교육은 지성을 어떻게 사용할 것인지 미리 명시하지 않고 폭넓은 정보를 바탕으로 고도로 훈련된 지성을 배양하는 것을 목표로 한다. 이러한 학습 접근 방식은, 대학을 탐색의 단계, 호기심을 행사하는 장소, 새로운 관심과 능력을 발견할 수 있는 기회로 간주하는 것이다.
- 일부 학생들은 다른 학생들보다 더 많은 기회를 통해 직업을 준비하려고 예일을 선택할 수 있지만 대학은 주로 주어진 진로에 대해 학생들을 훈련시키는 것을 추구하지 않는다. 대신에 주요 학습목표는 학생들이 궁극적으로 어떤 선택을 하던 반드시 필요한 지식과 능력(skills)을 주입하는 것이다. 이 교육 철학은 1828년 예일 보고서에 표현된 내용과 일치하며, “사고의 능력을 확장하는 것과 지식으로 그것을 저장하는 것”을 구분한다. 사실을 습득하는 것도 중요하지만 비판적이고 창의적으로 사고하는 다양한 방법을 배우는 것이 우선이다.
- 예일칼리지는 교양·기초 교육과정을 배분이수(Distributional Requirements)로 운영하고 있으며, ‘기초능력 필수(Fundamental Skill Requirements)’와 ‘학문분야별 필수(Area Requirements)’로 구분하여 균형 있게 이수하도록 한다. 그 중 ‘기초능력(Fundamental Skill)’은 대학에서 학문 활동을 하는데 반드시 필요한 기초 능력인 동시에 대학 졸업 후 사회에 진출할 때 갖추어야 할 기본적인 능력을 의미하며, 외국어(Foreign Language), 양적추론(Quantitative Reasoning), 글쓰기(Writing)로 구성되어 있다. 이는 일반적으로 미국 유수 대학에서 공통적으로 요구하는 교양교육의 기반이자 결과로 간주하는 인간의 가장 근본적인 역량이다.¹⁸⁾
- 양적추론 영역의 개설 목적은 다음과 같다. “정량적 방법론은 광범위한 학문 분야에 적용되면서 매우 중요한 역할을 담당해왔다. 수학과 통계학은 자연과학과 사회과학 분야를 위한 기본적인 도구이며 많은 인문학 분야에서도 유용한 도구로 활용되었다. 알고리즘과 형식적인 논리체계는 현대 정보 기술과 모든 분야에서 발생하는 논리적 주장에 대한 엄격한 분석 토대가 된다. 교육을 받은 사람은 양적 정보를 기반으로 한 주장을 이해하고, 평가할 수 있어야 한다.”¹⁹⁾

17) <http://catalog.yale.edu/ycps/yale-college/distributional-requirements/>

18) 김지현, 신의향(2017). *대학의 학부 교육 : 세계 대학의 우수 사례*, 교육과학사

19) 예일대학교 예일칼리지 교양교육과정 Distributional Requirements for the Bachelor's Degree : Skills requirement in quantitative reasoning 참조
<http://catalog.yale.edu/ycps/yale-college/distributional-requirements/>

- 양적추론 영역에 개설된 상당수의 교과목은 수학, 통계 및 데이터과학, 컴퓨터과학, 경제학 및 공학 분야에서 담당하고 있으나, 이외의 자연과학과 인문사회과학 분야에서도 적절한 교과목을 개발하여 개설하고 있다. 모든 학생들은 '양적추론' 영역에서 2개의 교과목을 필수 이수해야 한다.
- <표 4>는 예일칼리지에 개설되어 있는 양적추론 교과목 목록이다(김지현 외, 2017: 62).

〈표 4〉 예일칼리지 양적추론(QR) 영역에 개설된 교과목 예시

학문분야	과목명	학문분야	과목명
응용수학	• 수량적사고입문:계산의즐거움	지질학 및 지구물리학	• 지구의변화하는기후 • 대기,해양,환경변화
천문학	• 지구와별 • 천체물리학의개척자들과논쟁들 • 은하와우주론	수학	• 자연의기하학 • 프랙탈기하학
화학	• 문제해결의화학 • 포괄적인일반화학	언어학	• 언어와계산
컴퓨터과학	• 컴퓨터과학의위대학착상들 • 시각화, 데이터, 픽셀, 아이디어 • 디지털포털리얼리즘	통계학	• 통계학입문 • 통계학입문:자료분석 • 통계학입문:사회과학 • 통계학입문:의학 • 실제세계통계학
생태학 및 진화생물학	• 통계학입문:생명과학	철학	• 1차논리
경제학	• 미시경제의양적기반 • 경제학입문분석:미시경제학	물리학	• 근대물리학의발달
전기공학	• 컴퓨터엔지니어링입문	정치학	• 통계학입문:정치학
엔지니어링 및 응용과학	• 기술적세계 • 자료분석과예측	심리학	• 앞의방식으로서의통계학
환경연구	• 대기, 해양, 환경변화	양적추론	• 학제적인양적방법

(3) 컬럼비아대학교(Columbia University) 교양교육의 양적추론 개설 현황²⁰⁾

- 미국 뉴욕주 뉴욕시에 있는 아이비리그 사립대학, 컬럼비아대학교는 교양전담기관으로 School of General Studies(GS)을 운영하고 있다. GS 교양교육은 학생이 졸업한 후에도 학습과 성장을 계속할 수 있도록 지식과 능력(skills)을 증진시키고, 직업상 중책을 맡을 수 있는 기반을 다지는 역할을 하도록 설계되어 있다.
- 컬럼비아대학의 교양·기초 교육과정은 핵심(The Core) 교양으로 운영되고 있으며, 철학적

20) 컬럼비아대학교 교양교육과정 참조
<http://bulletin.columbia.edu/general-studies/the-core/quantitative-reasoning/>

탐구, 예술적 표현, 과학적 조사에 중점을 두고, 학문적 경계를 초월하고 학생들에게 국경과 역사적 시대를 넘어 주제를 추구하도록 한다. 학생들이 다양한 분야의 다양한 요구조건에 노출됨으로써 그들의 비판적, 분석적 능력을 개발시키는 교육이다. 핵심교양(The Core)은 글쓰기(Writing), 문학/인문(Literature/Humanities), 외국어(Foreign Language), 미술 인문(Art Humanities), 음악인문(Music Humanities), 글로벌 코어(Global Core), 현대문명/사회과학(Contemporary Civilization/Social Science), 양적추론(Quantitative Reasoning), 과학(Science) 영역으로 구성되어 있다.

- 양적추론 영역은 과학과 사회과학의 연구와 관련이 있는 정량적 분석과 연역적 추론에서 비판적 능력을 개발하는 것이 목표이며, 이 영역에 컴퓨터 과학, 경제학, 수학, 통계학 교과목이나 과학의 기초(Foundations of Science), 과학의 최전선(Frontiers of Science) 등이 개설되어 있다. 컴퓨터 과학, 경제학, 수학, 통계학 분야에서 개설된 교과목은 대부분 양적추론의 학습목표를 만족시킨다.
- 과학의 기초(Foundations of Science)는 현대적이고 학생 중심적이며 능동적이고 협력적인 학습방법을 사용하여 학생들은 현장 관찰, 수업 내 실험, 컴퓨터 시뮬레이션 및 선별된 읽기를 통해 과학적 사고 습관을 통합하고 고정하도록 설계된 다양한 아이디어와 테크닉을 경험한다. 천문학, 생물학, 화학, 지구과학, 신경과학, 물리학의 맥락에서 에너지, 물질, 세포 및 유전자와 같은 개념을 설명하기 위한 다양한 계산 기술, 그래프 읽기 및 추정을 다루는 주제들이 포함될 것이다.
- 과학의 최전선(Frontiers of Science)의 교육목표는 학생들에게 과학자들이 생각하는 방식을 소개하는 것으로, 비판적 사고능력을 개발하고 한 학문 영역에서 벗어나 다양한 분야의 맥락에서 탐구에 대한 과학적 접근방식을 익히도록 하는데 있다. 예를 들어 신경과학과 천체물리학처럼 다양한 분야에서 도출된 질문들을 연구하면서 학생들은 왜 과학자들이 규모 감각을 배양하는지, 왜 데이터를 그래프로 변환하기를 좋아하는지, 왜 그들이 인과관계와 상관관계를 구별하기 위해 그렇게 조심하는지를 알게 된다. 그 과정에서 학생들은 과학이 오래된 질문(우주에서 우리 인류의 위치는 어디인가?)과 새로운 질문(지속적인 산업화는 환경적으로 지속 가능한 제안인가?)에 대해 어떻게 대답할 수 있는지에 대해 생각하게 된다. 이 교과목은 모든 학생이 필수로 이수하여야 한다.
- 컬럼비아대학교 천문학과 교수인 데이비드 헬펀드(David J. Helfand)는 그의 저서 「생각한다면 과학자처럼」에서 양적추론 교과목의 필요성을 다음과 같이 설명하고 있다.²¹⁾

“현재 대다수의 대학생이 적어도 미적분 수업 한 과목을 듣고 입학하지만, 수를 이용하고 그래프를 읽고 기본적인 확률을 이해하고 비합리성과 합리성을 구분하는 능력이 부족하다. 정치인, 언론인, 의사,

21) 데이비드 헬펀드(2017). *생각한다면 과학자처럼*, 도서출판 길벗.

관료, 유권자 등 더 넓은 인구층에게도 정량적 사고 능력이 전무한 실정이다.(중략)

수는 저마다 나름의 의미가 있으며, 그 의미는 우리가 세계를 이해하는데 도움을 준다. 수야말로 합리적이고 과학적인 사회에서 통용되는 화폐이며, 그릇된 정보가 횡행하는 시대의 중요한 방패막이다.(중략)

과학은 자연을 정량화하지만 때로는 정성적인 방식으로 정량화한다. 어떤 것을 정확하게 계산하는 것이 아니라 어떤 것이 얼마나 큰지, 먼지, 무거운지, 파괴적인지, 비싼지 등을 재빨리 짐작해내는 것이다. 과학자들은 종종 이런 과정을 통해 일련의 관찰에 착수할 가능성을 짚어보고, 실험을 설계하고, 컴퓨터 시뮬레이션의 사용가능성을 평가한다. 또한 그러한 과정을 통해 자극적인 뉴스와 정치적 주장의 맥락을 살피으로써 우리가 들었거나 읽은 말이 참인지 여부를 판단할 수 있다.(중략)

통계의 진정한 목적은 측정의 불확실성, 특정 모형이 있을 때 어떤 측정값이 그 모형의 예측값과 일치할 가능성을 과학자들이 정량적으로 평가할 수 있도록 해주는 것이다. 흔히 과학은 정확성을 추구하는 정밀분야라고 알려져 있지만, 과학은 측정과 설명에 내재적이고 불가피한 불확실성을 지니고 있음을 스스로 잘 알고 있으며, 자연의 모형을 세우고 검증할 때 그러한 불확실성을 통계를 통해 명시적으로 설명한다. 통계는 그릇된 정보의 공격을 막는 훌륭한 방어수단이다.”

- 그 외에도 양적추론으로 승인된 강좌는 매년 업데이트된다. 2021-2022년에 승인된 양적추론 강좌는 다음과 같다.²²⁾
- 경제학을 위한 수학적 방법, 경제학 통계, 생태 및 진화생물학을 위한 통계개론, 논리 소개, 상징적 논리, 연구 설계: 데이터 분석, 연구 설계: 범위 및 방법, 게임이론과 정치이론, 통계학, 행동 과학자를 위한 입문 통계, 정치학을 위한 수학과 통계, 증거의 평가, 사회통계학, 정량적 방법, 공간 분석: GIS 방법 및 도시 사례 연구 등이다.

(4) 칼튼대학(Carleton College) 교양교육의 양적추론 개설 현황²³⁾

- 미국 미네소타주 노스필드에 위치한 리버럴아츠칼리지(Liberal Arts College) 칼튼대학은 학생들에게 “자유롭고 철저한” 교육을 제공하겠다는 목표 아래 학생들이 주요 과목에 집중할 수 있을 뿐만 아니라 다양한 학문에 도전할 수 있도록 교육과정을 편성하고 있다. 칼튼대학의 교양교육은 학생들의 삶을 변화시키고 빠르게 변화하는 세계에 대비하기 위한 교육이며, 학생들이 하나의 전공을 위해 학습하는 대신, 비판적 사고, 문제 해결, 창의성, 효과적인 의사소통, 역동적인 상황에 적응하는 융통성 등 평생 지속되는 능력에 중점을 두고 있다.
- 칼튼대학의 교양교육은 ‘논거와 탐구 세미나(Argument and Inquiry Seminar)’, ‘글쓰기(Writing)’, ‘양적추론 입문(Quantitative Reasoning Encounter, QRE)’, ‘글로벌 시민의식(Global Citizenship)’ 영역의 필수교양과 ‘커리큘럼 탐색 및 지적 참여(Curricular

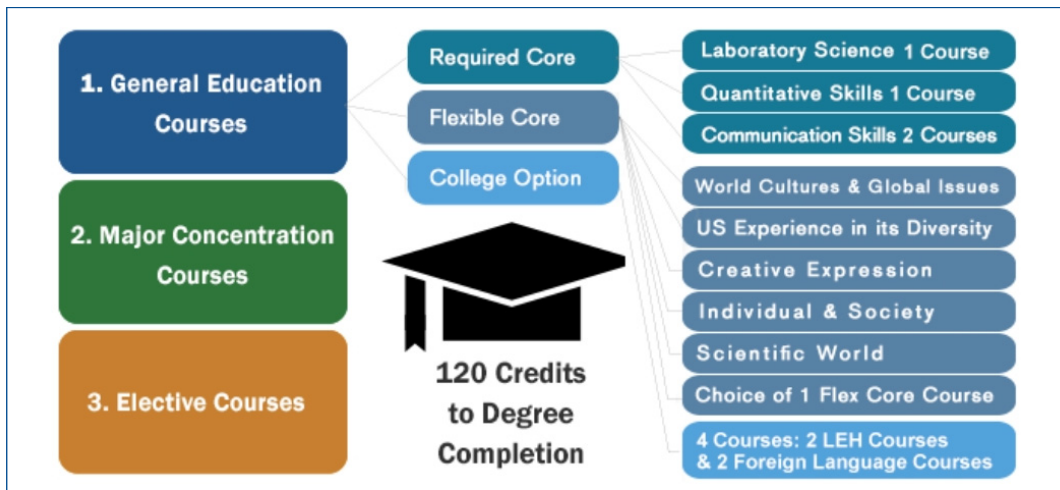
22) <https://bulletin.columbia.edu/general-studies/the-core/quantitative-reasoning/>

23) <https://apps.carleton.edu/academics/liberalarts/requirements/#qre>

- Exploration and Intellectual Engagement) 영역의 배분인수, ‘체육’ 등 6개의 영역으로 구분되어 있다.
- 교양교육 또는 배분인수에 해당하는 ‘커리큘럼 탐색 및 지적 참여’ 영역은 ‘인문학(humanistic inquiry)’, ‘문학/예술 분석(literary/artistic analysis)’, ‘예술 실습(arts practice)’, ‘과학(science)’, ‘형식적/통계적 추론(formal or statistical reasoning)’, ‘사회 탐구(social inquiry)’ 등 6개의 소영역으로 구분되어 있고, 각 영역에서 6학점 이상 이수하여야 한다. 이와 같이 칼튼대학은 필수교양(QRE)과 배분인수(형식적/통계적 추론) 영역에 양적추론과 관련된 소영역을 각각 개설하고 있다.
 - 교양교육과정 중 필수교양인 ‘논거 및 조사 세미나’, ‘글쓰기’, ‘양적추론 입문’, ‘글로벌 시민 의식’은 전통적인 학문 분야를 초월하는 본질적인 사고의 습관(essential habits of mind)을 기르도록 고안되었다. 특히 ‘양적추론 입문(QRE)’ 영역에서 추구하는 교육 목표는 양적추론 능력에 대한 학생들의 인식 제고 및 정량적 정보를 사용하여 논의나 주장을 평가하고 구성하고 소통하는 능력을 향상시키는 것이다. 학생들은 QRE에서 지정한 세 과목을 이수하게 된다. QRE 영역의 교양과목 요건을 완료하기 위해서 칼튼대학의 모든 학생들은 다음의 요구 조건을 충족시켜야 한다.
 - 문제 분석에 어떤 수치적 증거가 추가될 수 있는지를 고민하는 사고의 습관을 갖는다.
 - 특정 질문을 다루기 위한 적절한 정량적 또는 수치적 증거를 식별할 수 있어야 한다.
 - 데이터를 찾거나 수집할 수 있어야 한다.
 - 숫자 증거(예: 연관성과 인과관계의 차이 인식)를 철저히 해석한다.
 - 사용 방법 및 원자료의 제한 사항을 인식할 수 있어야 한다.
 - 양적 주장을 효과적으로 전달할 수 있어야 한다.
 - 배분인수 영역인 ‘커리큘럼 탐색 및 지적 참여’는 다양한 분야에 대한 자유 교육을 통해 예상하지 못한 흥미와 전통적인 경계를 넘어서는 경험을 할 수 있도록 구성되어 있다. ‘커리큘럼 탐색 및 지적 참여’ 내 하위 6개 소영역 중 ‘형식적/통계적 추론’에서는 많은 분야에서 지적 발달의 기초가 되고 있는 논리 체계, 형식적 모델, 추상적 수학적 추론, 통계적 추론의 개발에 역점을 두고 있다. 따라서 수학, 논리, 알고리즘의 설계 및 분석 또는 통계적 추론을 포함한 형식적 추론에 초점을 맞춘 교육을 시행하고 있으며, 최소 6학점 이상 필수로 이수하여야 한다.
 - 또한 칼튼대학은 양적추론 교수법을 중심으로 교육과정과 실습을 어떻게 만들지 설계하는 ‘정량적 질문, 추론, 그리고 지식(QuIRK, Quantitative Inquiry, Reasoning, and Knowledge)’이라는 혁신 프로젝트에 관여했다. 칼튼은 QuIRK를 평가(assessment), 전문적인 개발(professional development), 교육과정 개선(curricular reform)이라는 3 단계의 환류 시스템으로 관리하고 있다.²⁴⁾

(5) 리먼대학(Lehman College) 교양교육의 양적추론 개설 현황²⁵⁾

- 뉴욕시립대학교(The City University of New York, CUNY)에 소속되어 있는 리먼대학(Lehman College)는 미국 뉴욕주 브롱크스에 위치하고 있다. 교육과정은 <그림 2>와 같이 교양과정, 전공과정, 선택과정으로 구분한다. 교양과정은 교양필수, 선택적 필수(배분이수), 교양선택으로 구분하고 있다. 교양필수는 실험을 포함한 과학, 양적추론, 의사소통의 세 영역으로 나누고 있다.



[그림 2] 미국 뉴욕시립대학교 소속 리먼대학의 교육과정

- 리먼대학의 양적추론 프로그램은 모든 교과과정에서 수리적 문해력(numerical literacy)을 주입하기 위해 노력하고 있다. 이 프로그램은 학생들이 비판적으로 생각하고 데이터를 해석하고 결론을 도출하며 학문과 학제간 맥락 내에서 문제를 해결하기 위해 기초수학 능력(basic mathematics skills)을 적용하는 데 양적추론이 필수적이라는 믿음을 기반으로 한다. 양적추론 능력은 AAC&U가 2005년부터 진행한 LEAP(Liberal Education and America's Promise) 프로젝트를 통해서, 필수학습결과로 간주되는 지적이고 실용적인 능력 중 하나이다. 또한 “리먼 졸업생의 특성”으로 기관의 학습목표 중 하나이다.
- 인터넷이나 다른 형태의 미디어를 통해 접근하는 정보의 대부분은 본질적으로 양적이며 학생들은 일상생활에서 중요한 결정을 내릴 때 이러한 정보를 효과적으로 분석할 수 있는 기본 능력을 갖추어야 한다. 양적추론 능력은 많은 학생들이 일하게 될 비즈니스, 교육, 건강 및 정부 환경에서도 필요하다. 대부분의 학생들은 양적추론을 기본 수학 과정과 연관시키지만,

24) 칼튼대학 What is QuIRK? 참조 <https://apps.carleton.edu/quirk/>

25) <https://www.lehman.cuny.edu/academics/general-education-requirements.php#general>

- 리먼대학은 양적추론 능력이 이론 및 응용 설정 모두에서 수치 정보를 이해하고 해석하는 능력에 기반을 둔 광범위한 기술을 포괄한다는 개념에 전념하고 있다.
- 양적추론은 학생들이 다양한 맥락에서 수치적 사고를 통해 데이터를 분석하고 통합할 수 있도록 하는 단계적인 훈련이다. 사실 양적추론은 매일 접하게 되는데, 이는 설문조사 데이터를 이해하거나 그래프를 이해하는 능력을 의미한다. 예를 들어, 영어수업에서 학생은 텍스트에서 특정 단어나 문법 구조가 사용된 횟수를 셀 때, 양적추론 능력을 사용할 수 있다.
 - 리먼대학은 양적추론의 학습 성과로 평가되어야 할 6가지 능력을 <표 5>와 같이 제시하였다.

<표 5> 양적추론의 학습 성과로 평가해야할 6가지 능력

능력	설명
해석 Interpretation	수학 형태로 제시된 정보(예: 방정식, 그래픽, 다이어그램, 표, 용어)를 설명하는 능력
표현 Representation	관련 정보를 다양한 수학 형태(예: 방정식, 그래픽, 다이어그램, 표, 용어)로 변환하는 능력
계산 Calculation	문제해결에 필요한 계산을 수행하는 능력
응용/ 분석 Application/ Analysis	분석의 한계를 인식하면서 데이터의 정량적 분석을 바탕으로 적절한 결론을 내리고 판단하는 능력
가정 Assumptions	추정, 모델링, 데이터 분석에 필요한 중요한 가정을 만들고 평가하는 능력
소통 Communication	학습과정에서 주장이나 목적을 뒷받침하는 (어떤 증거가 사용되고 어떻게 형식화되고, 제시되며, 맥락에 맞는지에 대한) 양적 증거를 표현하는 능력

(6) 마이애미대학교(Miami University) 교양교육의 양적추론 개설 현황

- 미국 오하이오주 옥스퍼드에 있는 주립대학, 마이애미대학교(Miami University)의 교양교육은 전공에 관계없이 ‘마이애미 플랜(Miami Plan)’의 요구 사항을 충족하는 강좌를 수강하게 된다. 마이애미 플랜의 강좌는 비판적으로 생각하기, 콘텍스트(contexts) 이해하기, 다른 학습자들과 교류하기, 반성과 행동(reflecting and acting) 등 이 4가지 역량을 강조하며, 이를 위해 특별히 고안되었다.²⁶⁾ 마이애미 플랜은 교양의 여러 기초 영역에 개설된 다양한 강좌를 수강함으로써 전공을 보완하고 시야를 넓히도록 한다.
- 마이애미대학교의 교양과정은 7가지 영역(외국어, 인문학, 사회과학, 자연과학, 형식적 추론, 양적 문해력, 글쓰기)으로 구분되어 있다.
- 양적 문해력 즉 양적추론은 측정과 추정 능력, 스케일 감각(a sense of scale), 기본적인 확률 이론과 통계에 대한 이해 및 수로 추론하는 편만한 사고습관을 갖도록 하는 것이지

26) <https://miamioh.edu/cas/academics/advising/academics/requirements/index.html>

미적분학이나 고급수학을 위한 과목이 아니라고 설명하고 있다. 간단히 양적추론은 일상생활에서 수학과 통계를 활용하는 능력이다.

- Wolfe(1993)의 연구에 의하면²⁷⁾ 마이애미대학교는 1990년 양적추론을 학제적 과목으로 개발하면서 데이터로부터의 학습, 양적 표현, 증거와 주장, 그리고 양적 직관 등 양적추론의 4가지 상호 관련성을 고려하였다.
- 첫 번째, 데이터로부터의 학습은 자연과학과 사회과학 분야의 데이터를 수집하고 분석하는 능력이다. 과학의 가장 흥미로운 측면은 자연을 상대로 질문하고 데이터로부터 답을 얻는 과정이므로 학생들에게 세계에 대한 그들의 생각을 시험하고 새로운 발견을 할 수 있도록 학습 동기를 부여한다. 데이터를 수집하려면 가설 검증의 개념과 실험 및 체계적 관찰과 같은 특정 조사 방법에 대한 이해가 필요하다. 여기서 학생들은 평균, 표준편차, 중앙값, 상관 계수 같은 기술통계와 t 테스트, 카이 제곱과 같은 추론통계를 사용하고 계산하는 방법을 배운다.
- 두 번째, 양적 표현은 다양한 상황에서 '양적 언어'를 사용하고 이해하는 능력이며 양적 개념을 시각적으로 표현하는 능력이다. 일반적으로 숫자들의 집합은 이해하기 어렵지만, 표나 그래프로 표현된 자료는 직관적으로 이해하기 쉽다. 따라서 정량적 개념을 포함하고 있는 매우 다양한 그래프를 이해하고 작성할 수 있어야 한다. 지도(map)는 시각적 용어로 데이터를 나타내는 강력한 표현 수단이며 지리적, 사회적, 생태학적 개념을 문맥으로 표현하는데 매우 유용하다. 하지만 학생들은 보통 양적 표현으로 제작된 지도를 읽거나 지도를 만드는 교육을 받지 못했다. 더불어 다양한 스케일(scale)과 분포를 이해하는 것도 필요하다. 이를 통해 모든 현상의 밑바탕에 있는 공통된 개념 구조를 파악하고 보편성을 발견할 수 있다. 사람들은 서로 다른 스케일을 오해하여 종종 부적절한 추론을 하기도 한다.
- 세 번째, 증거와 주장이란 여러 증거들로부터 도출된 결론이 합리적인지 판단하는 것이다. 원시 데이터는 세상에 대해 아무것도 알려주지 않으므로 우리들이 추론과 의사결정을 통해서 해석해야만 그 안에 숨어있는 가치와 진실을 찾게 된다. 추론과 의사결정을 할 때 생길 수 있는 오류가 있는데, 예를 들어 "모든 개는 동물이다"와 같은 진술이 "모든 동물은 개"라고 암시한다거나 "아프리카계 미국인이 가난할 확률은 30%이다"를 "가난한 사람이 아프리카계 미국인이 될 확률은 30%이다"와 같다고 가정하는 오류이다.
- 마지막으로 양적 직관을 개발하는 것은 숫자와 다른 정량적 개념에 대한 "감 feel"을 개발하는 것이다. 양적 직관은 수에 대하여 좋은 감정을 느끼는 것이고 수의 크기를 인지하는 것도 포함한다. 즉 큰 수, 작은 수가 아니라 적합한 수로 상황을 표현할 수 있도록 하는 것이다. 예를 들어 일 년은 몇 초인지, 지수적 증가에 대한 감각이나 페르미 추정과 같이 기초적인 지식과 논리적 추론만으로 짧은 시간 안에 대략적인 근사치를 추정하는 것 등이다.

27) Christopher R. Wolfe(1993). "Quantitative Reasoning Across a College Curriculum", *College Teaching*, 41(1), 3-9.

- 양적추론의 이 네 가지 측면을 별도로 고려하는 것이 유용하지만, 본질적으로 서로 연결되어 있다는 것을 깨닫는 것이 중요하다. 예를 들어, 경험에 의한(실증적) 연구 논문을 읽으려면 데이터로부터 배우고, 양적 경험치를 이해하고, 증거와 주장을 평가하고, 양적 직관을 적용할 수 있는 능력이 모두 필요하다.
- 마이애미대학교는 양적추론 교육을 통해서 인문, 예술, 사회, 과학 등 여러 학문 분야의 통찰력을 통합하고자 하였다. 학제간 연구를 추구하기 위해서 양적추론을 수강하는 학생들은 팀별로 학습된 학제간 핵심 과정, 개별 학습 과정 및 프로젝트를 수행해야 한다. 학습목표는 학생들에게 양적추론의 주요 측면을 소개하고 능력 함양에 필요한 토대를 제공하는 것이다. 이런 이유로 대부분의 학문 분야에서 양적추론은 필요하고 교육받은 시민들에게도 양적추론이 중요하다는 것을 강조한다.
- 마이애미대학교 양적추론 영역에 개설된 교과목은 <표 6>과 같다.²⁸⁾

<표 6> 마이애미대학교 양적추론(QR) 영역에 개설된 교과목

학문분야	과목명	학문분야	과목명
생물학	<ul style="list-style-type: none"> • 생물학적개념:구조,기능,세포및분자생물학 • 인간생리학의원리 	지질학	<ul style="list-style-type: none"> • 다이나믹어스 • 환경지질학 • 미국국립공원의지질학
화학	<ul style="list-style-type: none"> • 현대사회의화학 • 전공을위한분석화학 	인류학	<ul style="list-style-type: none"> • 영장류행동관찰하기
수학	<ul style="list-style-type: none"> • 수학적모델링세미나 • 수치해석 	물리학	<ul style="list-style-type: none"> • 실험을 포함한 일반물리학
심리학	<ul style="list-style-type: none"> • 심리통계개론 • 심리학쓰기및연구방법 • 고급사회심리학 	통계학	<ul style="list-style-type: none"> • 비모수통계 • 통계모델링입문 • 고급데이터시각화 • 데이터분석실습
정치학	<ul style="list-style-type: none"> • 미국정치시스템 • 응용연구방법 	지리학	<ul style="list-style-type: none"> • 인구외이주 • 변화하는세상매핑하기
경제학	<ul style="list-style-type: none"> • 경제데이터및모델검토 	융합	<ul style="list-style-type: none"> • 성별과학과기술

28) https://bulletin.miamioh.edu/arts-science/?_ga=2.137842231.68266600.1638520732-354818230.1637930317#hecollegerequirementcastext

(7) 뉴욕대학교(New York University) 교양교육의 양적추론 개설 현황²⁹⁾

- 미국 사립대학교인 뉴욕대학교(NYU)의 홈페이지에 의하면, NYU의 교양교육 과정(The Core)은 학부 전공과 졸업 후 경력 그리고 대학원에서 필요로 하는 능력(skills)과 폭넓은 지적 관점을 제공하기 위해 고안되었다. 전문 직업을 위한 훈련이라기보다는 보편적인 지식을 넓히기 위해 추구되는 탐구 과정이다. 교양과목들은 비판적, 분석적, 의사소통 능력을 배양하고, 상상력을 키우며 창의적 사고가 발현되도록 한다. NYU의 교양기초교육은 신입생 세미나, 글쓰기, 외국어, 현대문화, 과학탐구의 기초 등 다섯 개 영역으로 구성되어 있다.
- 양적 사고와 과학적 사고의 과정과 적용을 강조하는 과학탐구의 기초 영역에는 양적추론, 물리과학, 생명과학 과정이 있다. NYU는 1995년부터 매학기 양적추론 교과목을 개설하고 있으며 『양적추론: 자연에서의 수학적 패턴 이해』교재도 개발하였다.³⁰⁾
- 양적추론 교과목을 개발하고 운영한 수학과와 Fred Greenleaf 교수의 인터뷰 내용은 다음과 같다.

“학생들은 ‘과학탐구의 기초’ 영역을 구성하는 양적추론, 물리과학, 생명과학 등 세 가지 과정을 순서대로 수강해야 하며 모든 과정에는 실습이 포함된다. 이 세 가지 과정 모두 양적 자료를 다루고 있고 두 개의 자연과학 과정은 과학적 추론의 본질을 강조하면서도 다양한 분야의 과학 지식을 통합적 시각으로 바라볼 수 있도록 하였다. 다만 ‘과학탐구의 기초’ 프로그램을 진행하는 데 있어서 가장 큰 장벽은 양적 관점에 대한 학생들의 불편함이었다. 많은 학생들이 수학을 두려워하고 있고 수학 실력이 부족하였기에 입학생의 20% 정도는 ‘과학탐구의 기초’의 첫 번째 과정인 양적추론을 수강하기 위해서 반드시 “수학적 사고”를 수강해야만 하였다. 소수지만 잘 준비된 학생들은 미적분학이나 통계학 같은 주요 수학 과정을 수강함으로써 양적추론을 대신하도록 허용하였다.

이러한 노력과 함께 수학적 약한 학생을 위해 좀 더 수업을 잘 듣도록 도와주고 격려도 했지만, 많은 학생들은 여전히 양적추론 과정의 분위기에 겁을 먹었다. 따라서 1997년부터는 배치고사를 통해 상위 20~25%의 신입생들에게 양적추론 과정을 면제했는데 그 결과는 놀라웠다. 일단 가장 우수한 학생들이 없으니 남아 있는 학생들의 사기와 성적이 크게 향상되었다. 그래도 또 다른 미묘한 문제가 있었는데, 남아 있는 학생 중 일부는 상대적으로 좀 더 준비가 잘 된 학생들로 이들에게는 자만과 실망이라는 기이하고 복잡한 상황이 발생했다. 양적추론에서 다루는 수학적 주제는 상당히 초보적이지만, 사용하는 방법은 그렇지 않았다. 그래서 ‘나는 중학교 때부터 이런 주제들을 봐왔는데, 필수과목이라 어쩔 수 없이 수강했기 때문에 평균성적이 떨어지며 성적표에 C가 나왔다.’라는 불만이 생겼다. 종종 고등학교에서 미적분학을 수강한 학생들에게 이러한 상황이 생겼고, 선행 학습을 한 학생들 대부분 양적추론이 면제되었지만 이 정도의 수준에 있는 학생들이 기본적인 주제조차 모른다는 것을 보여주었다.”

29) <https://cas.nyu.edu/core/about-the-program/the-five-parts-of-the-core.html>

30) 김혜영 김문석(2020). “대학 교양의 기초교육으로서 양적추론(Quantitative Reasoning) 교과목의 교육 목적과 교육 내용”, 2020 춘계전국학술대회, 한국교양교육학회, 212-218.

- NYU는 2020년에 4개의 양적추론 과목(문제와 통계 및 의사결정, 수학과 컴퓨팅, 수학에서의 위대한 사상, 데이터에서 발견으로)을 개설하였다. 양적추론 대체 과목은 생물통계학, 통계학, 분석통계학, 미적분학, 경제학을 위한 수학, 행동과학을 위한 통계학, 정치학을 위한 연구방법론 입문, 사회과학을 위한 미적분학, 언어의 패턴 등 15개 학문분야의 교과목들이다.
- 지금까지 미국의 시립대학, 주립대학, 사립대학 등 7개의 다양한 대학(하버드대, 예일대, 컬럼비아대, 칼튼대, 리먼대, 마이아미대, 뉴욕대)에서 개설한 양적추론을 조사하였다. 이 대학들의 공통점은, 양적추론이라는 단일과목 보다는 양적추론 프로그램이나 영역에 다양한 학문분야의 과목들이 양적추론과 더불어 해당 과목을 교육하기 위해서 개설되어 있다. 양적추론은 학문분야를 가로지르는 과목이며, 전통적인 수학과목과는 다르다는 의미이다.
- 미국 우수 대학들의 양적추론 사례와 같이 교육목표를 “일상생활에서 발생하는 수학적 요구에 자신 있게 대처할 수 있는 능력을 함양하여 현대사회의 시민으로서 역할을 준비한다.”와 같이 분명하게 제시하고 있다. 미국 대학들이 개설한 양적추론의 학습목표는 대부분 AAC&U가 제시한 양적추론의 정의를 그대로 따르고 있다. 우리도 이와 같은 기준이 필요하므로 우리나라의 교양교육을 선도하고 있는 한국교양기초교육원이 이런 역할을 적극적으로 수행하리라 기대한다.

III

양적추론의 개념과 내용

- | | |
|------------------------|----|
| 1. 양적추론의 이해 | 35 |
| 2. 양적 데이터 처리를 위한 기본 개념 | 44 |
| 3. 양적추론 학습자료 개발 | 53 |



III. 양적추론의 개념과 내용

1. 양적추론의 이해

1) 추론과 양적추론

(1) 추론(reasoning, inference, argument)

- 우리는 주어진 상황에 대한 지식을 가지고 새로운 사실을 유도하는 데 익숙해 있다. 실제 우리가 알고 있는 모든 과학적 사실들이 일정한 추론의 틀에서 비롯되었다고 하여도 과언이 아니다.
- 추론이란, 이미 알고 있는 명제를 기초로 하여 새로운 명제를 유도하는 과정으로 전제(premise)와 결론(conclusion) 간의 논리적 관계를 다룬다. 전형적으로 조건명제(implication)를 들 수 있다. 여기서 결론이란 새로 유도된 명제를 말하며, 전제란 결론의 근거를 제공하는 이미 알려진 명제를 일컫는다.¹⁾

(2) 양적추론(Quantitative Reasoning)²⁾

- 양적추론이란 무엇인가? 가장 간단히 말해서 양적추론은 양적으로 추론하고 양적(또는 수치적) 방법으로 문제를 모델링하고 해결하는 능력을 나타낸다. 학부 수준에서 양적추론은 이론적 질문에 데이터와 수치적 증거를 적용하는 학생들의 능력을 의미하기도 한다. AAC&U에 따르면 양적추론은 “일상생활에서 학생들과 관련된 문제를 해결하고 결론을 도출하기 위해서 학문 분야 또는 학제간 문제의 맥락에 기초수학을 사용하여 실제 양적 정보를 분석하고 해석하는 것”이다.
- 양적추론은 양적 문해력(Quantitative literacy), 정량적 유창함(Quantitative fluency), 수리력(Numeracy)이라고 하며, 학부 교육의 주요 학습결과를 논의할 때 자주 사용되는 용어이다. 간단하게, 정답이 없는 실제의 문제를 양적 자료를 근거로 해결하는 것이 양적추론이다.

1) <http://www.aistudy.co.kr/reasoning/reasoning.htm>

2) AAC&U *Peer Review* 16(3) 2014년 여름 보고서, 수잔 엘로드의 Quantitative Reasoning: The Next "Across the Curriculum" Movement <https://www.aacu.org/peerreview/2014/summer/elrod>

- 양적추론에 대한 주요 오해 중 하나는 이미 수학 수업에서 가르친다는 것이다. 그러나 양적추론은 수학과 다르다. 양적추론은 복잡한 추론과 의사결정 과정을 수행하는 데 필요한 기본적인 수학을 활용할 뿐이다. 계산을 수행하는 방법보다는 계산 결과의 의미가 더 중요하다. 전통적인 수학은 추상적이고 연역적 추론을 하지만, 양적추론은 실용적이고 견고한, 사고의 습관이다. 전통적인 수학은 주로 이공계의 전문적인 학문 분야에서 사용하지만, 양적추론은 모든 졸업생의 시민으로서의 책임과 개인을 위해 필수적인 능력이다.
- 교과과정 전반에 걸쳐 양적추론을 학제간 맥락에서 가르쳐야 하는 이유는 무엇인가? 학부생들에게 지적 능력의 개발은 무엇보다 중요하다. AAC&U는 지적이고 실용적인 능력이 “점점 더 도전적인 문제로, 프로젝트 및 성과 기준의 맥락에서 커리큘럼 전반에 걸쳐 광범위하게 연습되어야” 한다고 주장한다. 양적추론은 이러한 경험을 할 수 있는 또 다른 렌즈를 제공하며, 학생들이 주요 연구 분야의 문제를 다룰 때뿐만 아니라 “광범위하고 통합적인 문제해결 과제”를 다룰 때 교과과정 전반에 걸쳐 이러한 능력을 연마하고 통합한다고 한다. 따라서 양적추론 학습은 일반적인 학습보다 훨씬 더 많은 것을 경험하고 능력을 개발하게 된다.
- 양적추론은 학부 교육뿐만 아니라 그 이상에서도 성취되어야 하는 능력이다. 많은 교양 과목이 전통적으로는 양적추론과 관련이 없는 것처럼 보이지만 AAC&U는 <그림 3>과 같이 양적추론이 “비판적 사고, 기초수학, 학습을 위한 학문 분야 또는 실제 맥락의 교차점에 위치”한다고 강조한다. 중요한 것은, 양적추론 능력을 진정으로 평가하기 위해서, 학생들은 일반적으로 숫자와 관련이 없는 관계라도 다양한 맥락에서 정량적 관계를 식별하고 적용할 수 있어야 한다는 것이다. 공중 보건(예: 백신과 자폐증 사이의 연관성 평가), 정치학(예: 정치적 여론 조사에 기초한 판단), 영양학(예: 영양학적 사실 및 라벨 해석), 심지어 문학 및 예술과 같은 광범위한 분야에서 양적추론을 쉽게 발견할 수 있다.



[그림 3] AAC&U Peer Review 16(3) 2014년 여름 보고서 표지 및 양적추론 개념도

※ AAC&U Peer Review 16(3) 2014년 여름 보고서 표지(좌측) 및 보고서 내용에 있는 양적추론 개념도(우측)

- 궁극적으로 양적추론은 학생들이 비판적으로 사고하고 기초수학과 통계 기술을 적용하여 데이터를 해석하고 결론을 도출하며 학문 또는 학제 간 맥락 안에서 문제를 풀도록 요구한다(그림 3). 실제로, 그것은 고등학교에서 배운 수학과 통계를 요구하기 때문에, 모든 대학생들은 더 넓고 더 깊은 대학 수준의 결과를 얻기 위해 필요한 기본적인 능력을 갖추어야 한다. 이는 통합과 적용의 능력으로, 인지 능력 분류법을 기준으로 최상위에 있는 지적 능력이다.
- 양적추론 능력을 개발하는 과정에서 정보문해력 뿐만 아니라 글쓰기와 말하기 소통능력과 같은 다른 주요 능력도 이끌어낼 수 있다. 많은 사람들이 양적추론의 중요성을 지지하지만, 아직은 충분하지 않고 대학은 학생들에게 이러한 능력을 학습할 수 있는 기회를 적극 제공해야 한다.

(3) 질적인 관점과 양적인 관점

- 질적(qualitative)인 관점에서 중력에 관한 설명은, “지구가 태양 주위를 공전하는 이유는 거대한 물체가 다른 물체들을 끌어당기기 때문이다”라고 한다. 수량이 아닌 개념(관계성, 감정, 가치 등)을 포함한다.
- 양적(quantitative)인 관점에서 중력에 관한 설명은, “무거운 두 물체 사이의 끌어당기는 힘은 질량의 곱에 비례하고 그들 사이 거리의 제곱에 반비례한다는 것이다”라고 한다. 수량(수식)으로 이해하고 설명한다.
- 사례

질적인 관점	양적인 관점
• 비싸서 함부로 사지 못한다.	• 가격이 00 이상이어서 함부로 사지 못한다.
• 효과가 있는 사람이 많아서 널리 알려져 있다.	• 효과가 있을 확률이 0.7 이상이어서 사람들 90%가 알고 있다.
• 두 요인은 아주 밀접한 관계가 있다. (상관관계, 인과관계)	• 두 요인에 선형 관계가 있다. ($y = ax + b$)

- 질적추론과 양적추론

구분	내용
질적추론	<ul style="list-style-type: none"> • 가치에 기반한 정책적 판단 (부의 편중을 막으려면 소득재분배가 필요하다.) • data literacy의 일부분 (여론조사에 의하면 지지도가 상승 추세이다.) • 온도가 변화가 거의 없다. (온도가 28도를 유지하고 있다.) • 귀납적 추론 (QR TFT의 위원 구성이 남녀 동수이므로 각 위원회는 남녀비율이 같다.) • 연역적 추론 (유클리드 기하학)
양적추론	<ul style="list-style-type: none"> • 인문적 질문을 계량적, 수리적으로 추론 • 남북전쟁에서 얼마나 많은 사람이 죽었을까? • 연합사령부에 미군의 영향력이 큰 이유는? (UN군 전사자 37,000명 vs 미군 34,000명) • 전쟁에서 군인보다 민간인이 더 많이 희생된다?(한국전 민간인 24만명, 군인 77만명)

2) 데이터 리터러시(Data Literacy)

(1) 데이터 리터러시의 이해

- 데이터 리터러시는 “데이터를 이해하고 활용하는 능력”이며, 그 하위 역량은 데이터의 수집, 관리, 가공 및 분석, 시각화, 활용 등으로 실용성이 강조되고 있다. 특히 사회과학분야 연구를 위한 수단으로서 또는 비즈니스를 위한 수단으로서 데이터 리터러시의 실용적 측면이 부각되고 있고, 비판적 사고와 기초 통계 능력이 뒷받침되어야 한다는 것도 언급되고 있다.
- 통계청 통계교육원 홈페이지에 명시된 정의에 따르면, “데이터 리터러시는 데이터를 제대로 보고 읽을 줄 아는 능력이며 데이터를 목적에 맞게 활용하는 데이터 해석 능력 즉 문해력이다. 데이터에 담겨있는 의미를 파악해 내는 능력이야말로 디지털 세상을 살아가는 우리 모두에게 필요한 능력이다.”³⁾
- 교육부 공식 블로그에 따르면, “데이터 리터러시는 데이터를 목적에 맞게 활용하는 데이터 해석 능력이다.”⁴⁾ 또는 데이터를 읽고 이해하고 분석해서 활용할 수 있는 능력이다.⁵⁾ 우리 사회에서 말하는 데이터 리터러시의 하위 역량은 <표 7> 같다.⁶⁾

<표 7> 데이터 리터러시의 하위역량

하위 역량	내용
데이터 수집	수행하려고 하는 과제에 필요한 데이터를 알고, 데이터 유형별 장단점을 이해한다 업무에 필요한 데이터를 빠른 시간 내에 검색, 확인을 통해 확보한다 비정형적인 데이터 소스로부터 필요한 데이터를 선별적으로 추출한다
데이터 관리	원시 데이터에서 노이즈(오류 및 방해요소)를 제거해 분석이 가능한 형태로 전환한다 데이터 소스로부터 형성된 신규 데이터가 주기적으로 입력되도록 자동화한다 형태가 다른 데이터 세트에서 추출, 필터링, 조정을 통해 하나의 데이터 세트로 통합한다
가공 및 분석	확보, 정리된 데이터를 분석의 목적에 맞는 데이터 세트로 가공한다 다양한 수준의 데이터 분석을 실시하고 복잡한 통계처리를 위한 쿼리(질문)를 설계한다 정량적, 정성적으로 분석된 결과를 해석하여 설득력 있는 보고서로 작성한다
데이터 시각화	그래프, 차트, 인포그래픽 등 직관적이고 효과적인 방식으로 데이터를 표현한다 방대한 데이터에서 빠르게 특징적인 패턴이나 특이 사항을 추출한다 변수의 추이에 따라 결과값이 시계열적으로 바뀌어 표현되도록 프로그래밍한다
데이터 기획	업무 프로세스별로 생성되는 데이터 종류와 양을 파악한다 다양한 데이터 간의 관계를 유추하고 분석/활용 방법을 도출한다 데이터를 수집, 관리, 분석하는 일련의 과정을 계획, 실행, 개선한다

3) http://sti.kostat.go.kr/window/2019a/main/2019_sum_6.html

4) <https://if-blog.tistory.com/10919>

5) 민기영(2019), “데이터 리터러시”, 매일경제 10월28일자.

6) https://dbr.donga.com/article/view/1201/article_no/8184

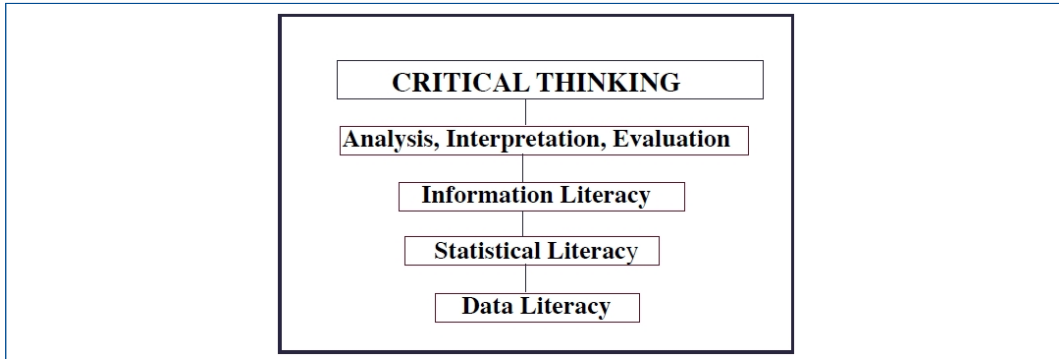
- 위키백과(Wikipedia)를 인용하면 데이터 리터러시는 “정보로서 데이터를 읽고, 이해하고, 생산하고, 소통하는 능력이다. 일반적인 개념으로서 읽고 쓰는 능력과 마찬가지로, 데이터를 읽고 쓰는 능력은 데이터 작업에 관련된 역량에 초점을 맞춘다. 그러나 데이터 리터러시는 데이터를 읽고 이해하는 것과 관련된 특정한 역량이 필요하기 때문에 텍스트를 읽는 능력과 구분된다.” 더불어 데이터 리터러시는 데이터 분석과 해석 그리고 활용을 다루는 데이터 과학(data science)과 연관되어 있다고 설명하고 있다.⁷⁾
- 한국교양교육학회가 개최한 2020 춘계전국학술대회에서 박수일(2020)은 데이터 리터러시를 “데이터를 제대로 읽고 제대로 해석할 수 있는 역량”으로 설명하고 있다.⁸⁾ 그는 보건의료정보 분야에서 데이터 리터러시 교육은 데이터에 대한 근본적인 이해보다는 기술 중심의 리터러시를 강조하고 있기 때문에 교양교육과 연계한 데이터 리터러시 교육이 필요하다고 강조하였다.
- Schield(2004)가 사회과학분야 저널에 발표한 그의 연구에서⁹⁾ 데이터 리터러시, 통계 리터러시(statistical literacy), 정보 리터러시(information literacy) 등 이 세 가지 리터러시의 공통점은 비판적 사고라고 밝혔다. 우선 정보 리터러시는 “정보를 읽고 해석하고 평가하기 위해서 개념이나 주장 및 논쟁에 대해 비판적으로 생각하는 것”이며,¹⁰⁾ 통계 리터러시는 “기초적인 기술 통계(descriptive statistics)에 대해 비판적으로 생각할 수 있어야 하고, 통계를 분석하고, 해석하고, 평가할 수 있는 능력”이다. 데이터 리터러시는 “데이터에 접근하고, 평가하고, 조작하고, 요약하고, 특별한 방식으로 표현할 수 있는 능력”이다. 이 세 가지 리터러시는 서로 연계성이 있으며, 세 가지 리터러시의 핵심 요인은 정보의 올바른 평가이다.
- 사회과학분야를 전공하는 학생들이 정보를 읽고 해석하고 평가하려면, 개념과 주장 및 논쟁에 대해 비판적으로 생각할 수 있어야 한다. <그림 4>와 같이 데이터를 분석, 해석, 평가하기 위해서는 정보 리터러시와 통계 리터러시 그리고 데이터 리터러시가 모두 필요하고 비판적 사고가 필수적이라는 것이다. 특히 데이터 리터러시는 비판적 사고와 통계 리터러시가 포함 되도록 확장되어야 한다는 것이다.

7) https://en.wikipedia.org/wiki/Data_literacy

8) 박수일(2020), “사회적 위기와 데이터 리터러시 교육-보건의료정보 분야를 중심으로”, 한국교양교육학회, 2020년 춘계전국학술대회 자료집, 184-191.

9) Milo Schield(2004), Information Literacy, Statistical Literacy and Data Literacy, *the International Association for Social Science Information Services and Technology: IASSIST Quarterly*, Summer/Fall

10) 개인용 컴퓨터와 웹의 출현과 함께, 정보 리터러시는 통계 리터러시와 데이터 리터러시 모두를 요구한다. 이 세 역량 모두 정보를 비판적으로 평가해야 한다는 것은 공통이다. 정보 리터러시는 (1)필요한 정보의 범위 결정 (2)필요한 정보의 효과적이고 효율적인 접근 (3)정보와 그 출처를 비판적으로 평가 (4)선택된 정보를 자신의 지식 기반에 통합 (5)특정 목적을 달성하기 위해 효과적으로 정보를 사용 (6)정보의 사용을 둘러싼 경제적, 법적, 사회적 이슈를 이해하고, 정보에 접근하여 윤리적으로 그리고 합법적으로 사용하는 것이다(Schild, 2004).



[그림 4] 비판적 사고를 바탕으로 한 정보 리터러시, 통계 리터러시, 데이터 리터러시(Schild, 2004)

- 데이터 리터러시는 단순한 계산적 표현 또는 시각적 도구 그 이상이며, 중요한 것은 사고방식이다. ‘비판적 사고’로 데이터를 바라보고, 질문을 던질 수 있고, 데이터를 이해하는 것이 데이터 리터러시의 출발이다. 즉 비판적 사고로 데이터를 읽고 이해하고 분석해 활용할 수 있는 능력이 데이터 리터러시이며, 이는 교양교육을 통해서 반드시 함양해야 할 기본역량이다. 교양의 기초교육 영역에 있는 기초과학, 통계학, 컴퓨팅적 사고, 대학수학 등에서도 데이터 리터러시의 교육이 가능하다. 데이터 리터러시에는 비판적 사고와 기초통계가 포함되기 때문이다. 다만 실제 데이터를 활용하여 학습하는 것이 중요하며 이와 같은 과목을 담당하고 있는 교수자가 데이터 리터러시의 필요성을 인지하는 것도 매우 중요하다.¹¹⁾

(2) 해외 대학에서 데이터 리터러시 학습 사례

① 캐나다 델하우지대학교

- 캐나다 노바스코샤주 핼리팩스에 위치한 공립 델하우지대학교(Dalhousie University)가 2015년 발간한 『데이터 리터러시 교육을 위한 전략 및 모범 사례 지식 종합 보고서』에 따르면¹²⁾ 데이터 리터러시는 비판적 태도로 데이터를 수집, 관리, 평가 그리고 활용할 수 있는 능력이다. 이는 글로벌 지식경제에서 요구하는 필수적인 능력인데, 데이터의 처리 과정은 모든 조직과 학문에 걸쳐 일상적으로 늘 발생되기 때문이다. 따라서 증거 기반의 의사결정을 할 수 있도록 데이터를 수집, 관리, 평가 및 활용하는 방법이 무엇인지, 데이터가 의사결정에 어떻게 영향을 미치는지를 이해하는 것은 캐나다 시민들에게 도움이 될 것이며, 지식경제 분야에서 점점 더 필요하다는 것이다.

11) 김혜영(2020). “뉴노멀 시대에 대학 교양기초교육에서 데이터 리터러시(Data Literacy)”, 2020 추계전국학술대회, 한국교양교육학회, 62-68.

12) https://www.researchgate.net/publication/284029915_Strategies_and_Best_Practices_for_Data_Literacy_Education_Knowledge_Synthesis_Report

- 델하우지대학교의 보고서에 따르면, 21세기에 필요한 역량은 비판적 사고, 문제 해결, 컴퓨팅 적 사고이며 비판적 사고는 데이터 리터러시를 위한 기본 역량이다. 데이터로 작업하려면 우선 올바른 질문을 하고 결과를 비판적으로 평가할 수 있는 능력이 필요한데, 이러한 역량을 의도적으로 교과과정에 포함시키지 않으면 별도로 학습하기가 어렵지만, 통계 리터러시나 과학 리터러시(science literacy)로 대체 가능하다고 평가하고 있다. 특히 과학 리터러시는 데이터 리터러시를 위해 필요한 비판적 사고와 관련된 분석 방법, 접근법, 사고하는 태도 등에서 유사점을 공유하고 있다는 것이다.

② 미국 버클리 소재 캘리포니아대학교

- 버클리 뉴스(Berkeley News)¹³⁾에 의하면, UC Berkeley는 데이터가 넘치는 세상에 살고 있는 학생들을 위해서 2015년 가을학기부터 “데이터 과학의 기초(foundations of data science)” 과목(4학점)을 개설하였다. 전공기초가 아니라 전교생을 대상으로 개설한 교양과목이다. 이 과목은 실제 데이터로 작업을 할 수 있는 기회를 제공하고 실제 문제를 해결할 수 있도록 교과내용이 설계되었다. 다양한 학문의 전공 교수들이 팀티칭으로 과목을 진행하고 있다.
- 학생들은 추론과 컴퓨팅의 핵심 개념을 배우면서 경제 데이터, 지리 데이터, 소셜 네트워크를 포함한 실제 데이터를 직접 다루게 된다.¹⁴⁾ 학생들은 가장 흥미 있는 특정 분야의 관심 주제를 정하고, 여기서 생성된 데이터를 중심으로 비판적 사고를 할 수 있도록 교육받고 있다. 이러한 과정을 통해서 맥락을 파악하면서 데이터를 이해할 수 있으며 데이터 분석 방법의 기초가 되는 컴퓨팅과 통계 개념을 배울 수 있다.
- UC Berkeley는 “데이터 리터러시는 중요하다. 이것은 100개 이상의 다양한 전공에서 공부한 UC Berkeley 졸업생 모두가 가져야 할 기본적인 역량 중 하나이다. 데이터 과학은 단순한 기술적 도구 그 이상이며, 그것은 바로 사고방식이다.”라고 말하고 있다. 또한 “데이터 과학은 그 나름의 뚜렷한 엄격함을 가지고 있으며, 문맥이 있으며 윤리적 문제를 야기한다. 예를 들어, 데이터가 어디서 왔는지, 어떻게 좋은 질문을 할 수 있는지, 그리고 데이터의 한계점은 무엇인지 알아야 한다.”는 것이다. 교과목 개요는 다음과 같다.¹⁵⁾

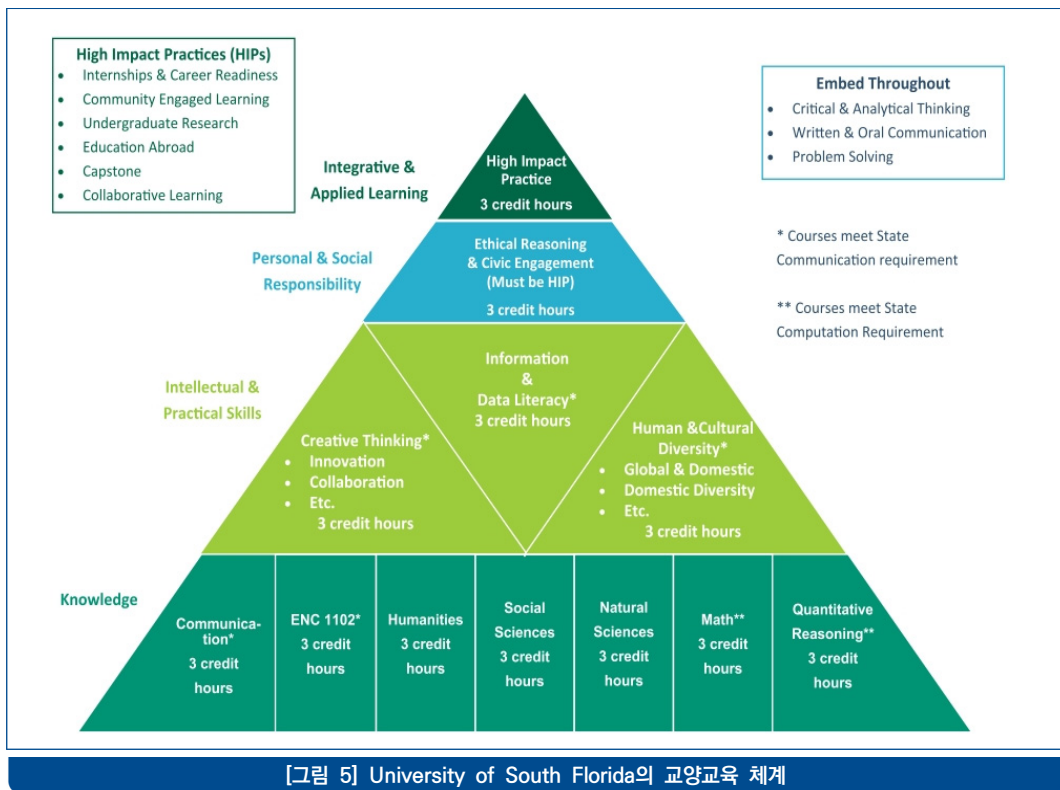
“교수진은 데이터 과학의 기초를 추론적 사고, 컴퓨팅적 사고, 그리고 현실세계(real-world)와의 관련성이라는 세 가지 관점에서 가르친다. 사회나 자연 현상에서 발생한 데이터가 주어졌을 때, 그 사실을 이해하기 위해 어떻게 데이터를 분석할까? 이 과목은 경제 데이터, 문서 모음, 지리적 데이터, 그리고 소셜 네트워크를 포함한 실제 데이터를 직접 분석해보는 경험을 바탕으로 컴퓨터 프로그래밍 및 통계 추론의 중요한

13) <https://news.berkeley.edu/2015/08/26/data-science-class/>
 14) <https://data.berkeley.edu/education/courses/data-8>
 15) <http://guide.berkeley.edu/search/?P=Foundations+of+Data+Science+>

개념과 스킬을 가르친다. 개인 정보 보호 및 데이터 소유권 문제를 포함하여 데이터 분석을 둘러싼 사회적, 법적 문제도 다룬다.”

3) 양적추론과 데이터 리터러시

- 양적추론과 데이터 리터러시를 비교하기 위해서, 미국 플로리다주 탬파에 있는 주립대학, 사우스플로리다대학교(University of South Florida)의 교양교육 프로그램을 참고하면, <그림 5>와 같다.¹⁶⁾ 피라미드의 바닥을 형성하고 있는 7개 영역은 학생들이 성공하는데 필요한 기본적인 지식을 제공한다. 지식(Knowledge)이라고 정의한 영역에 포함된 7개 소영역 중에 양적추론이 있다. 학생들은 지식단계에서 21학점을 이수해야 한다.



[그림 5] University of South Florida의 교양교육 체계

- 피라미드를 올라가면서, 학생들은 지적 및 실용적 영역에서 3학점 과정의 창의적 사고, 정보·데이터 리터러시, 인간과 문화의 다양성을 학습한다. 정보·데이터 리터러시에서 바로 데이터 리터러시를 함양할 수 있다. 이 대학에서는 양적추론을 교양의 기초지식으로 두었고, 데이터

16) <https://www.usf.edu/undergrad/general-education-council/enhanced-gened/enhanced-curriculum.aspx>

- 리터러시를 기초 지식을 바탕으로 함양해야 할 지적·실용적 능력으로 정의하였다.
- 세 번째 단계에서 학생들은 윤리적 추론과 시민 참여 과정을 수강한다. 이 단계는 개인적 사회적 책임 영역으로 정의했다.
 - 마지막으로 모든 학생의 학부 경험은 고영향수업(High Impact Practice) 과정을 수강함으로써 완성된다. 이는 인턴십, 지역사회 참여 학습, 학부 연구, 해외 교육, 캡스톤 과정 및 협업 학습과 같은 경험일 수 있다. 이 영역은 통합과 적용 학습 영역으로 정의했다. 학생들이 배운 것을 통합하고 적용하는 일종의 프로젝트를 만들기 위해 고학년 학생들을 위한 과정이다. 이 프로젝트는 연구 논문, 성과, '최고 작품'의 포트폴리오 또는 작품 전시가 될 수 있다.
 - 사우스플로리다대학교가 정보·데이터 리터러시에서 요구하는 것은 다음과 같다.
 - ① 연구 도구와 지표 또는 권위를 사용하여 출처의 신뢰성을 결정하고, 동시에 정보사용에 대한 법적 및 윤리적 제한 사항을 식별한다.
 - ※ 사회적 지위(예: 공직 또는 직함) 또는 특별한 경험(예: 역사적 행사 참여)과 같은 다양한 유형의 권위
 - ② 잘못된 주장, 잘못된 증거 사용 또는 모순되는 진술을 식별하기 위해 정량적 증거(그래프, 표, 도표 등)를 비판적으로 해석한다.
 - ③ 지역 온라인 커뮤니티, 토론, 학부 연구 논문, 컨퍼런스 프레젠테이션과 포스터 세션과 같은 다양한 방식으로 학문 분야에 적합한 커뮤니케이션을 사용하여 학술적 소통에 기여한다.
 - ④ 새로운 정보출처를 통합하고 기존 출처와의 관련성을 결정하여 제출된 학습과정을 수정한다.
 - ⑤ 분야별 권위 지표에 따라 다양한 측면을 신뢰할 수 있는 경우, 동일한 사실 또는 가설에 대한 반대 주장을 비판적으로 비교하고 대조한다.
 - ⑥ 시간 경과에 따라 특정 분야의 특정 주제에 대한 학문적 관점의 주요 변화를 요약한다.
 - ⑦ 정보 격차 또는 충돌 가능성이 있는 기존 데이터를 재검토하고 이를 기반으로 연구를 위한 질문을 공식화한 다음, 질문을 지침으로 의미 있는 방식으로 정보를 구성한다.
 - 사우스플로리다대학교의 교양교육과정에서 정보·데이터 리터러시는 데이터 리터러시보다는 정보 리터러시에 좀 더 비중을 둔 것으로 보이나, 데이터의 활용을 구체적으로 설명하고 있다는 측면에서 참고할 만하다.

2 양적 데이터 처리를 위한 기본 개념

1) 측정과 데이터¹⁷⁾

- 모든 양적인 데이터를 다룰 때 반드시 알아야 할 기본 지식은 우선 길이, 질량, 시간의 표준 단위, 단위의 환산, 차원분석, 크기의 정도(또는 크기의 자릿수), 유효숫자 등이다. 양적 사고에 필요한 중요한 단위는 이 보고서의 부록에 제시했다.

(1) 차원분석(Dimensional Analysis)

- 공간이 몇 차원이냐 하는 개념과는 다르게, 차원은 물리학에서 특별한 의미가 있는데, 어떤 물리 변수의 차원을 알면 그 변수의 물리적 성질을 알 수 있다. 예를 들면 두 지점 사이의 거리는 미터나 피트 어느 단위를 사용하여 측정하든지 간에 길이라는 차원을 갖는다.
- 길이, 질량, 시간의 차원을 나타내기 위해 일반적으로 사용하는 기호는 각각 L, M, T이며, 물리량의 차원을 표시하기 위하여 대괄호 []를 사용한다. 예를 들면 속력을 나타내는 기호는 v 이고 속력의 차원은 $[v]=L/T$ 이다. 힘은 질량×가속도($F=ma$) 차원을 갖는다. m 은 질량을, a 는 가속도를 나타내는 기호이고, 가속도의 차원은 $[a]=L/T^2$ 이므로, 힘 F 의 차원은 $[F]=MLT^{-2}$ 이다. 그리고 넓이 A 의 차원은 $[A]=L^2$ 이고, 부피 V 의 차원은 $[V]=L^3$ 이다.
- 어떤 식을 유도하거나 검증할 필요가 있을 때, 차원분석(dimensional analysis)이라는 유용한 방법을 사용할 수 있다. 차원 분석은 차원을 대수적인 양으로 취급할 수 있다는 점을 이용한다. 즉 물리적인 양은 같은 차원일 때만 더하거나 뺄 수 있으며, 방정식에서 양변의 항들은 같은 차원을 가져야만 한다. 이와 같은 간단한 규칙에 따라 어떤 표현식이 옳고 그런지를, 차원 분석을 통하여 쉽게 판단할 수 있다.
- 가설을 세우고 식을 만들 때, 너무나 당연한 이야기지만 좌변에 등장하는 차원과 우변에 등장하는 차원이 같아야 한다.

(2) 크기의 정도(Order of Magnitude, 크기의 자릿수)¹⁸⁾

- 한 수가 얼마나 큰지를 대략 추산하는 것으로, 어떤 수를 십진수로 나타냈을 때의 자릿수이다. 크기의 정도 1은 한 자릿수(10배)다. 크기의 정도 2는 $10^2=100$ 배, 두 자릿수이다. 주로 큰 수를 어렵하거나 두 수의 크기를 비교할 때 이용한다.
- 인체에는 얼마나 많은 세포가 있는지, 전자의 질량이 얼마인지와 같은 질문에 답하려면 매우

17) Jewett, John W & Serway, Raymond A.(2013) *대학물리학*, 서울: 북스힐

18) 데이비드 헬펀드(2017) *생각한다면 과학자처럼*, 노태복 옮김, 도서출판 길벗, 109쪽

- 큰 수나 작은 수들을 다루어야 한다. 이런 수를 십진법으로 표현하는 방법, 즉 10에 대한 지수로 나타내는 것을 과학적 표기법(Scientific notation)이라고 한다. 과학적 표기법에서 모든 수는 $m \times 10^n$ 의 형태로 작성된다. 여기서 지수 n 은 정수이고 크기의 정도라고 하며, m 은 보통 1 이상 10 미만의 실수이다.
- 수 98과 수 212는 둘 다 크기의 정도가 100으로 같다. 즉 명확하게 100과 같지는 않지만, 어떤 목적 하에서는 똑같이 취급할 수 있을 만큼 100과 가깝다.
 - 크기의 정도 계산이 추산에서 유용한 까닭은 세부사항이 불필요하거나(시카고의 피아노 조율사 수) 정확한 값을 구하는 것이 말 그대로 불가능하기(우주의 별의 개수) 때문이다.
 - 아래와 같이 10의 거듭제곱을 이용하여 크기의 정도(또는 크기의 자릿수)를 나타내면 어렵으로 근삿값을 구할 수 있다.
 - ① 1에서 10까지의 수에 10의 거듭제곱을 곱한 과학적 표기법으로 수를 나타낸다.
 - ② 곱하는 수가 3.162(10의 제곱근)보다 작으면, 수의 크기의 정도는 과학적 표기법으로 나타낸 10의 거듭제곱 그 자체이다. 만일 곱하는 수가 3.162보다 크면, 수의 크기의 정도는 10의 거듭제곱에 나타난 지수에 하나를 더 더한 값이 된다.
 - 기호 '~'는 '크기의 정도에 있는'이라는 뜻으로 다음과 같이 사용한다.

$$0.0086\text{m} \sim 10^{-2}\text{m}, \quad 0.0021\text{m} \sim 10^{-3}\text{m}, \quad 720\text{m} \sim 10^3\text{m}$$
 - 통상적으로 어떤 양에 대해 크기의 정도로 어렵값이 주어지면, 그 결과는 대략 10배 정도 내에서 신뢰할 만하다. 어떤 양의 크기의 정도(10의 거듭제곱에 나타난 지수)가 3만큼 증가했다면, 그 양은 대략 $10^3=1,000$ 배 증가한 것을 의미한다.
 - 어떤 숫자를 너무 적게 어렵잡아 생긴 부정확도는 종종 연산에 포함된 아주 크게 어렵잡은 다른 숫자에 의해 상쇄되기도 한다.
 - [예제] 보통 인간 수명을 70년으로 추정하고, 사람의 분당 평균 호흡 횟수를 생각해 보자. 호흡 횟수는 사람이 운동 중인지 수면 중인지, 혹은 화나거나 차분한 상태인지 등에 따라 달라진다. 가장 근접한 크기의 정도로 평균 호흡수를 분당 10회로 어렵하자(이것은 분명히 분당 1회나 100회를 선택하는 것보다 훨씬 실제 값에 가깝다).
 - 1년을 분으로 어렵하여 계산한다.
 - $70\text{년} = 70 \times 365 \times 24 \times 60\text{분}$

$$\approx 70 \times 400 \times 20 \times 60\text{분}$$

$$\approx 30000 \times 1,200\text{분}$$

$$\approx 4 \times 10^7\text{분}$$
 - 평생 호흡수를 어렵으로 구하면(분당 10회) 4×10^8 회 이다.
 - 따라서 사람은 평생 $\sim 10^9$ 회 호흡을 한다. 즉 크기의 정도가 9만큼 호흡을 하므로 10억 회에 가깝다.

(3) 유효숫자(Significant Figures)

- 어떤 양을 측정할 때, 측정값은 실험적 오차 범위 내에서만 의미를 갖는다. 이러한 불확실한 정도는 실험 장치의 정밀도, 실험자의 기술 그리고 실험 횟수 등 여러 가지 요인들의 영향을 받는다. 측정에서 유효숫자(significant figures)의 개수는 불확실한 정도를 표현하는 데 사용된다. 유효숫자의 개수는 측정값을 표현하기 위해 사용하는 숫자의 개수와 관계가 있다.
- 자를 사용하여 콤팩트디스크의 반지름을 측정한다고 하자. 이 디스크의 반지름을 측정하는데 정밀도가 $\pm 0.1\text{cm}$ 라고 가정하자. 불확정도가 $\pm 0.1\text{cm}$ 이기 때문에, 측정된 반지름이 6.0cm 라고 하면 반지름은 5.9cm 와 6.1cm 사이에 있다. 이 경우 측정값 6.0cm 는 두 개의 유효숫자를 갖는다고 말한다. 측정값의 유효숫자는 첫 번째 여림 자릿수를 포함함에 주목하라. 따라서 우리는 반지름이 $(6.0 \pm 0.1)\text{cm}$ 라고 기록할 것이다.
- 영(0)은 유효숫자에 포함될 수도 있고, 포함되지 않을 수도 있다. 0.03 또는 0.0075 와 같이 소수점의 위치를 나타내기 위해 사용된 0은 유효숫자가 아니다. 따라서 위의 두 수는 각각 한 개와 두 개의 유효숫자를 가지고 있다. 그러나 다른 숫자 뒤에 위치한 0의 경우 잘못 인식할 가능성이 있으므로 조심해야 한다.
- 예를 들어 어떤 물체의 질량이 $1,500\text{g}$ 이라고 할 때 두 개의 0이 소수점의 위치를 나타내기 위하여 사용된 것인지 또는 측정값의 유효숫자인지 불확실하다. 이와 같은 불확실성을 제거하기 위하여, 유효숫자의 수를 확실하게 나타내주는 과학적 표기법을 흔히 사용한다. 위의 경우 유효숫자가 두 개이면 $1.5 \times 10^3\text{g}$, 세 개이면 $1.50 \times 10^3\text{g}$ 그리고 네 개이면 $1.500 \times 10^3\text{g}$ 으로 표현한다. 1보다 작은 숫자에도 같은 규칙이 적용된다. $2.3 \times 10^{-4}\text{g}$ 또는 0.00023g 은 두 개의 유효숫자를 가진다. $2.30 \times 10^{-4}\text{g}$ 또는 0.000230g 은 세 개의 유효 숫자를 가진다.
- 소수점의 오른쪽에 붙는 0은 유효숫자다. 92.00 은 유효숫자가 네 개다. 92.00 이 92 와 다르다는 것이 중요하다. 누군가 측정값을 92.00 밀리미터라고 제시했다면 이는 자기가 쟀 수치를 100 분의 1 밀리미터 단위까지 보고하며, 그 값이 그 정도의 정밀도를 갖는다고 암묵적으로 주장하는 것이다. 한편 측정값을 92 밀리미터라고 제시하는 사람은 그 값을 1 밀리미터 단위까지만 보고한다. 0이 아무 의미가 없는 것이 아님을 이해하는 것이 중요하다. 이 경우 0은 다른 수들처럼 실제 정보를 표시한다. 측정의 정밀도에 부합하지 않는 0을 마음대로 붙이면 안 된다. 그러면 그릇된 정보를 전한다.
- 수 $540.$ 과 같이 정수 끝에 소수점이 붙는 경우 맨 끝에 있는 0은 유효하다. 보통 정수 끝에 소수점을 붙이지 않는다. 하지만 관례상 이 소수점은 유효숫자 0을 가리킨다. 따라서 수 $540.$ 의 유효숫자는 세 개다.
- 문제를 풀 때, 수학적으로 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 등을 이용하게 된다. 이때 계산 결과의

값이 적절한 유효숫자를 갖는지 확인하여야 한다. 곱하거나 나누는 경우 유효숫자의 개수를 결정하는 데 도움을 주는 규칙은 다음의 예를 참고한다.

- 위에서 측정된 콤팩트디스크의 반지름값을 이용하여 콤팩트디스크의 넓이를 구하는 데 위의 규칙을 이용해 보자. 원의 넓이를 구하는 식을 이용하면

$$A = \pi r^2 = \pi (6.0 \text{ cm})^2 = 1.1 \times 10^2 \text{ cm}^2$$

이다. 이 계산을 계산기를 이용하여 값을 구하면, 113.0973355이다. 이 값 모두를 사용할 필요가 없다는 것은 분명하지만, 결괏값이 113cm²라고 말하고 싶을 것이다. 그러나 반지름이 단지 두 개의 유효숫자를 가지므로 넓이도 두 개의 유효숫자를 가져야 한다.

- 즉, 여러 가지 양을 곱할 때 결괏값의 유효숫자의 개수는 곱하는 양 중 가장 작은 유효숫자의 개수와 같다. 나눗셈의 경우도 마찬가지이다.
- 가령 한 과학자가 보고하기를, 움직이는 한 물체의 속력이 3초에 2미터 이동하는 값이라고 하자. 이때 그 물체의 속력 대한 올바른 표시는 (2/3)m/s 즉 0.6666666667m/s가 아니라 0.67m/s이다. 0.6666666667m/s라는 표현은 소수점 아래 11 자릿수의 정밀도를 갖기에 이는 측정자가 속력을 1조 분의 1단위까지 안다는 것을 암시한다. 그렇다면 정말 최첨단 실험이 아닐 수 없다. 2미터와 3초 모두 정밀도가 유효숫자 한 개일 뿐이다.
- 숫자를 더하거나 뺄 때, 결괏값에서의 소수점 아래 자릿수는 계산 과정에 포함된 숫자 중 소수점 아래 자릿수가 가장 작은 것과 같아야 한다. 이 규칙의 한 예로서 다음의 덧셈을 고려해 보자.

$$23.2 + 5.174 = 28.4$$

- 이 경우에 답으로 28.374로 보고하지 않음에 주목한다. 왜냐하면 23.2가 소수점 아래 자릿수가 하나로 가장 작기 때문이다. 따라서 답은 소수점 아래 한 자리만 가져야 한다.
- 덧셈과 뺄셈의 규칙을 적용하면 답은 때때로 계산을 시작할 때의 숫자와 다른 유효숫자를 갖게 된다. 예를 들어 다음의 연산을 고려해 보자.

$$1.0001 + 0.0003 = 1.0004$$

$$1.002 - 0.998 = 0.004$$

- 첫 번째 예에서, 0.0003이 한 개의 유효숫자를 갖더라도 결과는 다섯 개의 유효숫자를 갖는다. 마찬가지로 두 번째 계산에서 각각 네 개와 세 개의 유효숫자를 가진 수들 사이의 뺄셈이지만 결과는 오직 한 개의 유효숫자를 갖는다.
- 계산의 결과에서 유효숫자의 수를 줄여야 하는 경우에는 반올림을 하는 것이 일반적인 규칙이다. 즉 버리는 마지막 자릿수의 값이 5보다 같거나 크면 남아 있는 마지막 자릿수(버리는 자릿수의 앞자리)의 값에 1을 더하고(예를 들어 1.346은 1.35가 된다), 5보다 작으면 남아 있는 마지막 자릿수의 값은 그대로 둔다(예를 들어 1.343은 1.34가 된다). 어떤 사람들은

- 버리는 마지막 자릿수의 값이 5일 경우 남아 있는 마지막 자릿수의 값이 짝수이면 그대로 두고 홀수이면 1을 더하기도 한다. (이 규칙은 계산에서 누적되는 오차를 줄여준다.)
- 누적되는 오차를 줄이기 위한 방법은 최종 결과를 얻을 때까지 긴 계산 과정에서 반올림을 하지 말아야 한다. 계산기에서 마지막 답을 얻을 때까지 기다렸다가 정확한 유효숫자의 개수로 반올림한다.
 - 때때로 어떤 수학적 계산이 이상하거나 틀린 것처럼 보이게 만든다. 예를 들어

$$-17.7\text{km} + 34.6\text{km} = 17.0\text{km}$$
 이 뻔셈은 틀린 것처럼 보이지만, 이는 17.7km와 34.6km를 반올림했기 때문이다. 중간 과정의 수에 있는 자릿수를 모두 그대로 유지하다가 최종값에서만 반올림하면, 17.0km이라는 올바른 세 자리 결과를 얻게 된다.
 - 크기의 정도를 계산할 때는 일반적으로 하나의 유효숫자를 가지고 계산한다.

(4) 오차와 불확실성¹⁹⁾

- 구분할 수 있는 양을 세는 경우를 제외하고 모든 측정값은 불확실성을 갖고 있다. 과학자들은 그런 불확실성을 종종 오차(error)라고 부른다. 오차란 측정값과 참값의 차이를 말한다. 측정 오차는 유한한 시간 동안 측정 과제를 수행하면서 유한한 정밀도를 갖는 도구를 사용하는 까닭에 어쩔 수 없이 생기는 것이다.
- 동일한 대상을 반복 측정할 때 늘 같은 값을 얻는 것이 아니다. 이런 차이를 내는 오차에는 두 가지 종류, 계통오차(systematic error)와 우연오차(random error)가 있다.
- 계통오차에는 예를 들어, 측정기구가 다를 때 혹은 방의 온도가 측정할 때마다 미묘하게 달라서 측정 대상이 수축하거나 팽창할 때 생긴다. 일부 계통오차의 원인은 제거될 수도 있으나, 통제될 방법이 없을 수도 있다.
- 우연오차도 완전히 없애긴 어렵지만 정량화하고 줄이는 것은 가능하다. 우연오차는 측정주체로 인해 발생한다. 예를 들어 책상의 길이를 재는 경우, 우연오차는 자를 책상 모서리에 정확히 일치시키지 못했거나 매번 자의 길이만큼 정확하게 이동시키지 못하든가 하는 측정 주체의 부주의 등으로 인해 생긴다.
- 가령 책상의 길이가 5.02 ± 0.17 피트라고 할 때, \pm 기호는 책상의 진짜 길이가 4.85피트와 5.19피트 사이라는 의미가 아니다. 이 기호는 측정치가 어떤 범위 내에 있을 확률을 기술하기 위한 약어다. 오차의 분포, 즉 확률의 분포가 늘 쉽게 결정되지는 않지만, 대체로 개별 측정치들은 정상분포에 따라 분포되어 있다고 가정하는 편이 안전하다. 정상분포는 흔히 종 곡선(bell curve)이라고 한다. 또는 가우스곡선(Gauss curve)이라고도 한다. 가우스곡선을 기술하

19) 데이비드 헬펀드(2017) *생각한다면 과학자처럼*, 노태복 옮김, 도서출판 길벗, 228쪽~233쪽

는 방정식은 $P(x) = [\sigma \sqrt{2\pi}]^{-1} \times e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ 이다. 여기서 시그마(σ)는 표준편차이고 뮤(μ)는 x 의 평균값이다.

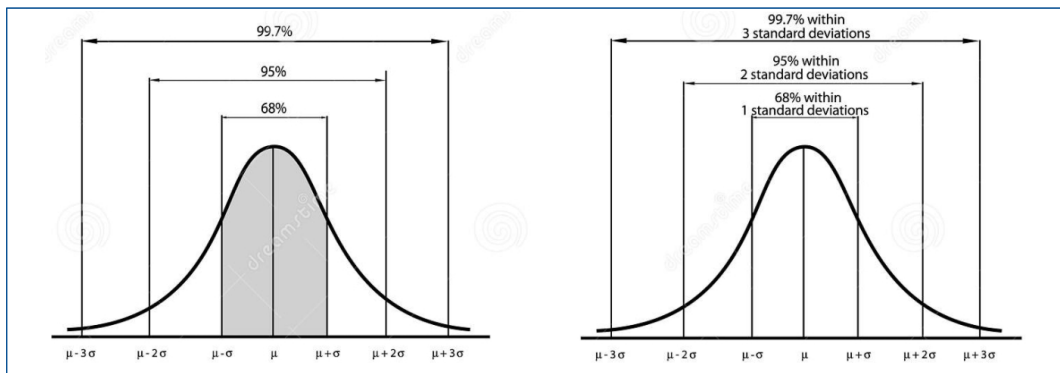
- 이렇게 평균값, 표준편차, 분산에 대해서 이것이 모집단에 대한 값이나 표본에 대한 값이나를 구별하기 위해서 기호를 따로 분리해서 사용한다.

	평균값(mean)	표준편차	분산
모집단 (N)	mu 또는 m	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}}$	$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}$
표본 (n)	\bar{x}	$s = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}}$	$S^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}$

※ <https://ko.khanacademy.org/math/kor-12th-option-2/x4831802356d2c89b:15-3> 참고

※ average는 표본을 가장 잘 표현하는 값으로, 평균값(mean), 중앙값(median), 최빈값(mode)으로도 나타낼 수 있다.²⁰⁾

- 가우스 방정식의 그래프는 다음과 같다. 곡선 위의 점들은 모든 측정치의 평균값을 나타낸다. 만약 모든 우연오차가 상쇄될 수 있을 만큼 무수히 많은 측정치들을 구할 시간이 있다면, 그 평균값이 구하고자 하는 양의 참값(=책상의 길이)을 나타낼 것이다. 시그마 값이 곡선의 폭을 결정하는데, 이 값을 표준편차라고 한다.



- 어떻게 시그마값을 알 수 있을까? 즉 어떻게 하면 측정에서 오차 분포의 폭을 알 수 있을까?
- 표준편차를 나타내는 시그마는 측정을 20번 하든 200번 하든 달라지지 않는다. 그것은 측정 기법과 관련해서 줄일 수 없는 오차를 설명해주는 요소이기 때문이다. 하지만 우연오차는 속성상 많은 측정값이 합쳐질수록 줄어든다. 20번 측정한 평균값은 9번 측정한 평균값보다 참값에 더 가깝다.

20) <http://www.differencebetween.net/science/difference-between-average-and-mean/>

- 이렇게 평균값에 표시된 ‘오차’는 각각의 측정값에 관한 오차가 아니라 평균값의 오차다. 그 오차는 σ/\sqrt{n} 임이 밝혀졌는데(=평균의 표준 오차, SEM), 여기서 n 은 측정횟수다. 그러므로 정량적으로 말하자면, 25번 측정값은 1번 측정값보다 $\sqrt{25}=5$ 배 더 나은 셈이다.
- 어떤 측정값의 우연오차를 표시하는 일반적인 방법은 ± 1 시그마(표준편차)를 적는 것이다. 가우스곡선 하에서 적분을 해보면, 전체 면적의 68%가 평균값의 ± 1 시그마 내의 곡선 부분에 놓여있다.
- 책상의 길이 측정값이 5.02 ± 0.17 피트라고 보고하는 것의 실제 의미는 책상 길이의 참값의 범위가 1 시그마 수준(68퍼센트의 신뢰 수준)에서 4.85~5.19피트 사이에 있다는 뜻이다. 즉 참값이 이 범위 바깥에 있을 확률이 32퍼센트라는 의미다. 하지만 측정을 25번 했다면 평균값의 오차는 $5.02\pm 0.17/\sqrt{25} = 5.02\pm 0.034(1\sigma)$ 라고 표시하여 성실함을 자랑할 수 있다. 이것은 참값이 68퍼센트의 확률로 4.986~5.054피트 사이에 놓인다는 뜻이다. 만일 책상 길이를 더 주의 깊게 표시하고자 하면, $5.02\pm 0.068(2\sigma)$ 처럼 2 시그마의 불확실성을 이용할 수 있다. 이것은 가우스곡선에서 보았을 때, 참값이 95퍼센트의 확률로 4.952~5.088 피트 사이에 놓인다는 뜻이다.
- 표준오차(標準誤差, standard error, SE)는 통계의 표본 분포의 표준편차이다. 평균의 표준오차(standard error of the mean, SEM)는 표본 평균분포의 표준편차를 가리킨다. 평균의 표준오차는 표준편차를 \sqrt{n} 로 나눈 것과 같다(위키백과).

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

(5) 불확실성과 통계²¹⁾

- 통계의 진정한 목적은 측정의 불확실성, 그리고 특정 모델이 있을 때 이런 측정값이 그 모델의 예측값과 일치할 가능성을 과학자들이 정량적으로 평가할 수 있도록 해주는 것이다. 여기서 ‘일치한다’고 말하지, 어떤 측정에 대해 모델이 옳은지를 증명한다고 말하지 않는다.
- 과학의 세계는 증명이 관건이 아니다. 흔히 과학은 정확성을 추구하는 정밀한 분야라고 알려져 있지만, 과학은 측정과 설명에 내재적이고 불가피한 불확실성을 지니고 있음을 스스로 잘 알고 있으며, 자연계의 모델을 세우고 검증할 때 그러한 불확실성을 통계를 통해 명시적으로 설명한다.

21) 데이비드 헬펀드(2017) *생각한다면 과학자처럼*, 노태복 옮김, 도서출판 길벗, 239쪽

2) 모델(Model)과 가정

(1) 모델 만들기

- 모델은 수집된 데이터를 해석하기 위한 개념 틀이다. 모델의 종류에는 네 가지 형태가 있다.²²⁾
 - ① 물리적 모델: 농도가 다른 두 액체가 담긴 회전하는 수조는 태양의 자기폭풍을 야기하는 요동의 발생을 연구하는데 쓰일 수 있다.
 - ② 생물학적 모델: 유전자 조작을 통해 헌팅턴 유전자를 제거한 쥐는 그 유전자가 부호화하는 단백질을 생성할 수 없기 때문에 헌팅턴병 환자에 대한 모델로 쓰일 수 있다. 참고로 생물학자들은 그런 모델을 유전자변형 쥐라고 부른다.
 - ③ 수치적 모델: 일반적인 순환모델을 구성하는 수백 줄의 소프트웨어 코드는 대양, 얼음판, 대기, 그리고 식물의 복잡한 상호작용을 파악하여 지구 기후의 미래를 예측할 수 있다.
 - ④ 해석적 모델: 뉴턴의 단순한 방정식은 야구방망이에 맞은 공의 비행경로를 기술하므로 우리는 그러한 모델을 이용해 공이 어디에 떨어질지 계산할 수 있다.

- 모델은 방대한 개수의 측정값들 비교적 간단한 형태로 체계화하고 기술하는 하나의 방법(그냥 방법이 아니라 하나의 방법이라고 한 점에 유의하시길) 제시한다는, 매우 좁은 의미에서 데이터를 설명한다고 할 수 있다. 게다가 좋은 모델은 자연의 한 계가 만약 다른 방식으로 관찰되고 조정되고 조사되면 어떻게 반응할지 예측할 수 있다.
- 모델은 실체가 아님을 늘 염두에 두는 것이 중요하다. 모델은 하나의 과정이나 현상의 본질적 구성요소들을 조합하여 장래의 행동을 예측하려고 인위적으로 만든 추상적 개념이다. 모델을 만들 때 모든 중요한 관련 변수들, 그리고 이들 사이의 관계를 전부 포함시키려고 애쓰지만, 그러려면 어쩔 수 없이 근사를 이용하고 가정을 세울 수밖에 없다. 그 결과 모델 예측은 불확실성을 수반한다. 측정값에 현실적인 불확실성을 할당하는 것이 매우 중요하듯이, 모델 예측에 수반되는 불확실성을 인식하고 정량화하는 일이 필수적이다. 그래야만 실제 세계와 모델 세계를 통계적으로 유의미하게 비교할 수 있다.
- 모델의 본성(Nature of model)을 8가지 특징으로 설명할 수 있다.²³⁾ 우선 관찰한 현상이나 계를 간단하게 혹은 단순하게 나타내는 간단화(simplification)이다. 자연현상이나 계의 모든 특징을 포함하는 것이 아니라 어떤 중요한 사실을 분리하여 이론으로 함축화(abstraction) 한다. 자연현상이나 계에 대한 개념, 과정, 상호작용에 대해 여러 가지 양식으로 표상화(representation)한다. 현상의 작용과 그 요소가 어떻게 상호작용하는지에 대한

22) 데이비드 헬펀드(2017) *생각한다면 과학자처럼*, 노태복 옮김, 도서출판 길벗, 278쪽

23) 조혜숙 남정희 오필석(2017). 과학교육에서 모델 및 모델링에 대한 고찰: 메타모델링 지식을 중심으로. *Journal of the Korean Association for Science Education*, 37(2), 239~252, 2017

가설을 추측하거나 모델과 현상 사이의 관계를 정교화하는 추론(reasoning)이다. 정량화(quantification)하기 위해서 모델의 요소와 관계에 대한 생각을 수학적 형태로 표현한다. 관찰한 자연 현상이나 계를 분해하여 모델의 중요한 요소를 확인하고 연구하는 분석(analysis)이다 모델의 변인의 결과 및 경험적 자료를 해석(interpretation)하여 그 관계를 밝힌다. 마지막으로 모델의 요소들의 관계를 확인하여 하나의 요소가 다른 요소를 변화시키는 원인을 증명하는 설명(explanation)을 한다.

- 모델의 본성을 구체적으로 설명하면 아래와 같다.

	정의	학생 활동
간단화 (Simplification)	· 복잡한 현상의 간단화(Rouse & Morris, 1986) · 특별한 목적에 대해 관찰할 수 있는 실체에 대한 복제품의 구성(Gilbert, 2004)	· 학생들은 현상의 관계를 간단하게 나타내기
함축화 (Abstraction)	· 현상이나 계에 대해 어떤 중요한 특성을 분리하거나 선택하여 일부 특성을 포함(Chamizo, 2013)	· 학생들은 현상의 특별한 특성을 함축하기
표상화 (Representation)	· 계의 현상에서 관찰할 수 있는 요소에 대한 언어적, 시각적, 구체적인 표상(Forbes, Zangori & Schwarz., 2015; Mendonca & Justi, 2013).	· 학생들은 자신의 정신 표상을 외적 표상의 여러 양식(언어적, 시각적, 물질적)으로 표현하거나 이러한 양식들을 통합하여 나타내기
추론 (Reasoning)	· 계의 부분들을 어떻게 인과적 또는 상관적으로 연결되는지에 대한 탐색(Zhang <i>et al.</i> , 2006) · 모델의 요소들이 어떻게 상호작용하고 행동하는지에 대해 추측하여 가설을 생성(Sins, Savelsbergh & van Joolingen, 2005)	· 학생들은 모델에서 포함되어야 할 관계를 선택하고, 어떤 것들을 포함시키거나 배제할지에 대해 논의하기
정량화 (Quantification)	· 특성의 변화를 기술 또는 수학적 방정식으로 변환(Hestenes, 1993) · 타당성과 신뢰도를 높이기 위한 관계의 명백화(Nisbett & Wilson, 1977).	· 학생들은 모델의 양적 표현을 위해 수학적 형태로 보다 정확하게 나타내기
분석 (Analysis)	· 계와 현상에 대한 부분으로의 분해(Zhang <i>et al.</i> , 2006) · 변수, 대상, 요소를 확인, 선택, 생성(Sins, Savelsbergh & van Joolingen, 2005) · 결론의 도출 또는 비평(Sins, Savelsbergh & van Joolingen, 2005)	· 학생들은 대상, 요소, 변수의 값에 대해 이야기하거나 결론에 대해서 논의하기
해석 (Interpretation)	· 변수들이 시간에 따른 변화의 확인(Hogan & Thomas, 2001)	· 학생들은 변수들의 변화의 결과를 표나 그래프로 나타내기
설명 (Explanation)	· 모델의 부분들이 인과적이나 상관적으로 어떻게, 왜 관련되어 있는지에 대한 명백화(Sins, Savelsbergh & van Joolingen, 2005; Windschitl, Thompson & Braaten, 2008)	· 학생들은 자신의 아이디어나 설명을 지지하기 위해 논리적으로 논의하기 · 학생들은 '왜냐하면'이라는 단어를 사용하여 관계가 어떻게, 왜 그런지 나타내기

(2) 가정(Assumptions)과 맥락

- 데이터를 수집해서 모델을 세우고 어떤 이론이 틀렸음을 증명하려고 할 때, 관련된 모든 가정에 엄밀한 주의가 필요하다. 대다수의 가정은 검증할 수 있으며, 그중 다수는 정량화할 수 있다. 늘 가정이 결과에 초래하는 한계를 인식해야 하며, 가정에 의문을 던지는 습관이 필요하다.
- 어느 경우든 양적추론에는 어려움이 필요하다. 어려움에는 앞에서 언급한 차원분석, 과학적 표기법, 유효숫자, 크기의 정도, 기술통계 등을 활용한다.
- 맥락이 없으면 수는 그릇된 정보가 된다.²⁴⁾ 수는 그릇된 정보의 시대에서 생존하기 위한 사고습관을 기르는 핵심 도구다. 그러나 맥락이 없으면 수는 사실상 아무 의미가 없다. 이런 상황을 타개할 방법은 두 가지다. 그 수를 무시하거나 그 수에 맥락을 부여한다.

24) 데이비드 헬펀드(2017) *생각한다면 과학자처럼*, 노태복 옮김, 도서출판 길벗, 114쪽

3) 페르미 추정

- 시카고의 피아노 조율사는 몇 명일까?
- 몇 가지 가정과 근사치를 사용하는 능력을 개발하기 위해 고안된 문제로 기초적인 지식과 논리적 추론만으로 짧은 시간 안에 대략적인 근사치를 추정하는 방법이다. 이 문제는 이탈리아의 물리학자 엔리코 페르미가 시카고대학 학생들에게 출제했다고 알려져 있다. 게스티메이션(Guesstimation)이라고도 하며, 기업 채용 면접에도 종종 등장한다.²⁵⁾

다음의 데이터를 가정한다.

1. 시카고의 인구는 약 300만 명이다.
2. 가구당 구성원은 약 3명이다.
3. 피아노 보유율을 10% 정도라 하면 10만 가구가 피아노를 갖는다.
4. 피아노 조율은 일 년에 한 번 한다고 가정한다.
5. 조율사가 조율에 걸리는 시간은 이동시간을 포함해 2시간 정도이다.
6. 조율사는 하루 8시간, 주 5일, 1년에 50주간 일한다.

이러한 가정을 바탕으로 다음과 같이 대략적인 숫자를 추론할 수 있다.

1. 시카고는 총 100만 가구 (300만/3)
2. 피아노는 총 10만대 (100만/10)
3. 피아노 조율은 연간 10만 건
4. 피아노 조율사는 1년간 1,000대를 조율 ($4 \times 5 \times 50$)

따라서 조율사의 수는 100명 (10만/1000)

- 비슷한 추정으로 이와 같은 질문을 할 수 있다. 엠파이어스테이트 빌딩에 몇 개의 벽돌이 있을까? 지구의 질량은 얼마일까? 인터넷 검색을 하라는 것이 아니다!

3 양적추론 학습자료 개발

1) 교수자를 위한 양적추론 주제 발굴 방법

- 먼저 학습자에게 던질 추동질문(Driving Question)을 생각한다. 어떤 질문을 던질지, 이 질문을 어떻게 해결할지 고민하는 과정에서 교수자는 양적추론 주제를 발굴할 수 있다. 간단하게 세 가지 방법을 제안한다.
 - ① 양적추론 주제를 발굴하는 가장 쉬운 방법은 교수자의 강의 내용 중에서 찾는 것이다. 어떤 학문적 맥락에도 양적인 주제는 있기 때문이다. 이것을 가장 추천한다.

25) 위키백과

- ② 그다음에는 신문이나 학술논문을 근거로 교수자가 양적추론 단계를 구성한다.
 - ③ 양적추론 교과서에 있는 양적추론 학습자료를 활용한다. 가장 확실한 방법이다.
- 노스웨스턴대학교 양적추론 교과서에서 제시한 양적추론 단계는 다음과 같다.²⁶⁾

1단계 질문 프레임 짜기	직감적인 편견/의견이 있는 질문의 경우 - 편견 배제
	질문을 명확화하기 - 구체적, 수정/해석
	대답을 예상하기 - 일단 예상해 본다.
2단계 모델 만들기	분석 요인은 무엇인가 - 어떤 요인? - 포함/배제
	수집할 데이터 결정 - 어떤 데이터? - 출처는?
	가정을 한다. - 모델링의 전제 - 가정을 열거하기
	모델을 구성한다. - 어떻게 (수식) 만들까?
	오류를 점검한다. - 오류의 원인은? - 오류의 크기는?
3단계 결과 분석	계산을 한다. - 계산 방법 설명 - 결과 산출
	작업 과정을 확인한다. - 점검, 방향을 바꾸어서 - 간편 계산으로
	확신하는지 확인한다. - 신뢰도 - 가능한 양적으로
	결과를 분석한다. - 질적 분석, 의미
	현실성을 체크한다. - 오류를 암시하는가?
	전체 내용을 요약한다. - 단계에 따라 정리

- 아이디어 생산의 원칙을 생각한다. 하늘 아래 새로운 것은 없다, 단지 새로운 조합만 있을 뿐이다!

아이디어 생산의 5단계²⁷⁾ (반드시 이 5단계를 거쳐야 한다)

- 1단계는 정보·지식·팩트·데이터 같은 원재료(raw materials)를 수집하는 단계다.
- 2단계에서 퍼즐 조각 맞추기를 하는 것처럼 관계를 찾아 보면 머리가 혼란스러운 상태가 된다.
- 3단계는 아무것도 하지 않는 단계다. 최대한 마음에서 문제를 비워라. 음악을 듣고, 영화를 보고, 시를 읽으면 된다.
- 4단계는 아이디어가 나오는 단계다. 이 단계에서는 문제에 대해 자나 깨나 항상 생각한다.
- 5단계는 아이디어를 실용화하는 단계다. 아이디어를 현실 세계에 적용시키는 단계다.

26) Eric Zaslav(2020). *Quantitative Reasoning Thinking in Numbers*, Cambridge University Press.

27) <https://www.joongang.co.kr/article/14878919#home>

2) 데이터 수집하기

- 사실 데이터 해석보다는 어떤 데이터가 필요한지 파악하는 것이 훨씬 더 어렵다. 이 점이 양적추론 학습에서 강조되는 부분이다. 문제 해결을 위해 어떤 데이터를 찾을까? 다양한 출처에서 자료를 찾을 때, 신뢰할 수 있고 대표성이 있으며 편견이 없다고 판단되는 데이터가 무엇인지 판단해야 한다. 그리고 데이터의 한계를 이해하는 것은 매우 중요하다.

(1) e-나라지표

- 강의시간에 활용하기 가장 좋은 데이터 중 하나는 정부가 관리하고 있는 e-나라지표이다.
- e-나라지표란, 국가정책 수립, 점검 및 성과측정 등을 목적으로 중앙행정기관이 선정하고 관리하는 주요 지표인 나라지표를 제공하는 웹기반의 통계정보시스템이다.²⁸⁾ 자료출처는 공공데이터포털(data.go.kr)이며, 통계생산기관인 행정안전부 디지털정부국 공공데이터정책관 공공데이터정책과 담당이다.
- 나라지표는 통계표, 그래프 및 의미 분석 등으로 구성된 자료로, 국가정책의 수립, 국정운영상황의 점검 및 정책성과의 측정 등에 활용하기 위하여 선정된 자료이다. 이는 공공기관이 보유·관리하는 데이터의 제공 및 그 이용 활성화에 관한 사항을 규정함으로써 국민의 공공데이터에 대한 이용권을 보장하고, 공공데이터의 민간 활용을 통한 삶의 질 향상과 국민경제 발전에 이바지하기 위함이다.
- e-나라지표는 현재 41개 중앙행정기관에서 739개 나라지표를 제공하고 있다.²⁹⁾
- 최신지표, 인기지표 등 지표를 구분하고 있으니, 이와 같은 지표를 활용하여 양적추론 학습자료 아이디어를 얻을 수 있다.³⁰⁾ 아래 그림은 인기지표 중 '합계출산율'로 그래프와 통계표도 볼 수 있다.

28) <https://www.index.go.kr/main.do?cate=1>

29) https://www.index.go.kr/potal/intro/system/system_offc.do

30) <https://www.index.go.kr/potal/main/EachPage.do?mmenu=7&smenu=1>

그래프/통계표

그래프

- 출생아 수 및 합계 출산율



[출처 : 통계청, 「2020년 출생통계(확정)」, 국가승인통계 제10103호 출생통계]

[주석 : * 합계 출산율 (TFR, Total Fertility Rate) : 여성 1명이 평생동안 낳을 것으로 예상되는 평균 출생아 수를 나타낸 지표로서 연령별 출산율(ASFR)의 총합이며, 출산력 수준을 나타내는 대표적 지표임

그래프/통계표

그래프

- 출생아 수 및 합계 출산율

통계표

- 합계 출산율

[단위 : 천명, 가입여자 1명당 명]

	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
출생아 수	471.3	484.6	436.5	435.4	438.4	406.2	357.8	326.8	302.7	272.3
합계 출산율	1.244	1.297	1.187	1.205	1.239	1.172	1.052	0.977	0.918	0.840

[출처 : 통계청, 「2020년 출생통계(확정)」, 국가승인통계 제10103호 출생통계]

[주석 : * 합계 출산율 (TFR, Total Fertility Rate) : 여성 1명이 평생동안 낳을 것으로 예상되는 평균 출생아 수를 나타낸 지표로서 연령별 출산율(ASFR)의 총합이며, 출산력 수준을 나타내는 대표적 지표임

[국가통계포털(KOSIS)]

[인구동향조사] 상세 통계표 조회하기(클릭)

- 또한 지표 설명과 해석도 잘 되어 있는데, 합계출산율(TFR, Total Fertilty Rate)이란 여성 1명이 평생 동안 낳을 것으로 예상되는 평균 출생아 수를 나타낸 지표로서 출산력 수준을 나타내는 국제적 지표이다. 수치해석방법으로 설명하면, 최근 혼인 감소 등 출산에 미치는 요인들의 변화에 따라 '15년 이후 지속 감소하여 '18년 합계출산율은 0.977로 1.0명대 이하로 떨어졌다. 합계출산율이 높을수록 한 여성이 출생하는 자녀 수가 많다는 의미이다. 합계출

산율은 출생통계 작성(1970년) 이래 최저치로, 1.0명 이하로 감소하였다. 2020년 출생통계(확정) 분석 결과에 따르면 2020년 총 출생아 수는 27만 2천 3백 명으로 전년보다 -10.0% 감소하였다. 합계출산율(여성 1명이 평생 낳을 것으로 예상되는 평균 출생아 수)은 0.84명으로 전년(0.92명) 보다 0.08명 감소하였다.

- 최신지표에 있는 <교원 1인당 학생 수> 지표를 활용할 경우, “교원 1인당 학생 수는 왜 대학이 가장 높을까?”와 같은 추동질문을 만들 수 있다. 최신지표에 있는 <영어/모성 사망> 과 <국내 총생산 및 경제성장률(GDP)> 지표 활용하면, “경제가 좋아지면 영어/모성 사망은 감소할까?”와 같은 질문도 가능하다. 인기지표에 있는 <에너지원별 발전량 현황> 지표를 활용하면, “1인당 전력소비량과 가장 관련 있는 지표는 무엇일까?”와 같은 질문을 만들 수 있다.
- 물론 교수자가 이런 데이터 정보를 학습자에게 먼저 주는 것이 아니라, 교수자가 질문을 만들기 위해서, 그리고 양적추론 아이디어를 만들기 위해서 데이터를 기반으로 아이디어를 만들 수 있다는 것이다. 교수자가 교육을 할 때는 학습자가 스스로 데이터를 찾도록 유도하는 것이 중요하다. 앞에서도 언급했듯이 데이터 해석보다는 어떤 데이터가 필요한지 파악하는 것이 더 어렵기 때문이다.

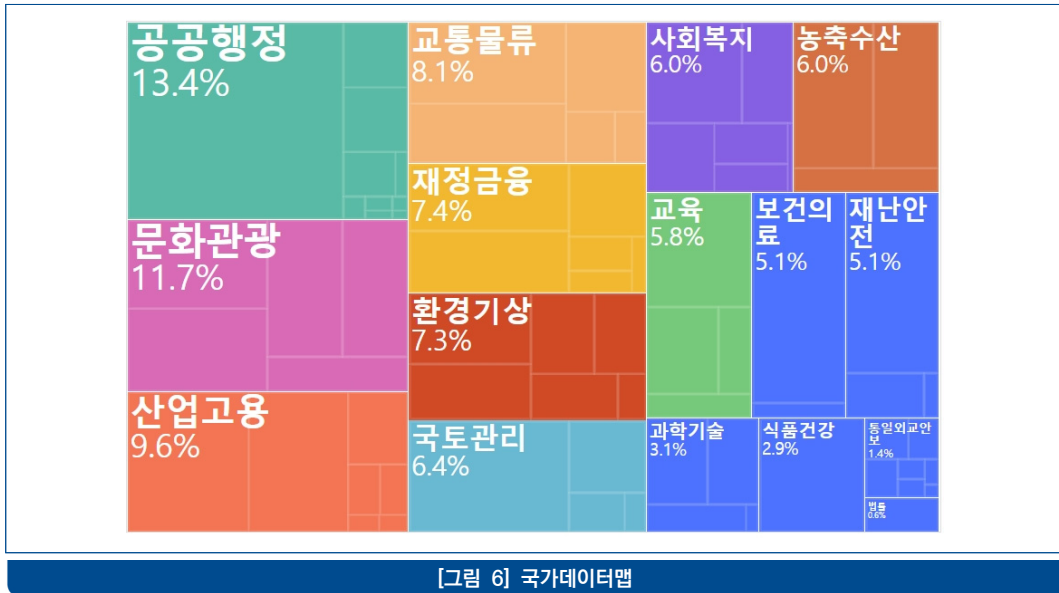
(2) 공공데이터포털³¹⁾

- 공공데이터란 공공기관이 만들어내는 모든 자료나 정보, 국민 모두의 소통과 협력을 이끌어내는 공적인 정보를 말한다. 각 공공기관이 보유한 공공데이터 목록과 국민에게 개방할 수 있는 공공데이터를 포털에 등록하면 모두가 공유할 수 있는 양질의 공공데이터로 재탄생하게 된다.
 - 공공데이터포털은 행정안전부에서 운영하는 공공데이터 통합제공 시스템이다. 대한민국 정부가 보유한 다양한 공공데이터를 개방하여 누구나 편리하고 손쉽게 활용할 수 있게 하는 것이 목적이다. 행정안전부 공공데이터정책과에서 관련 정책을 추진하고 있다. 공공데이터포털은 《공공데이터의 제공 및 이용에 관한 법률》(2013. 10월 시행) 제 21조에 의해 대한민국 행정안전부 장관에 의해 구축 운영되고 있다.
 - 용어 정리를 하면, 우선 공공데이터는 공공기관이 직무상 전자적 방식으로 처리·작성·취득하여 관리하고 있는, 부호·문자·음성·음향·영상 등으로 표현된 모든 종류의 데이터이다. 개방(제공)이란 공공기관이 이용자에게 ① 정보를 재활용할 수 있도록 제공하고, 제공받은 정보를 ② 상업적·비영리적으로 이용할 권한을 부여하는 것을 의미한다. 활용(다운로드)은 공공기관이 개방한 데이터를 이용자가 파일로 다운로드 받거나, 오픈API 활용신청을 통해 활용하는 것을 의미한다.³²⁾
- ※ 오픈API(Application Programming Interface): 공공기관이 제공하는 업데이트가 빈

31) <https://www.data.go.kr/index.do>

32) https://www.index.go.kr/potal/main/EachDtlPageDetail.do?idx_cd=2844

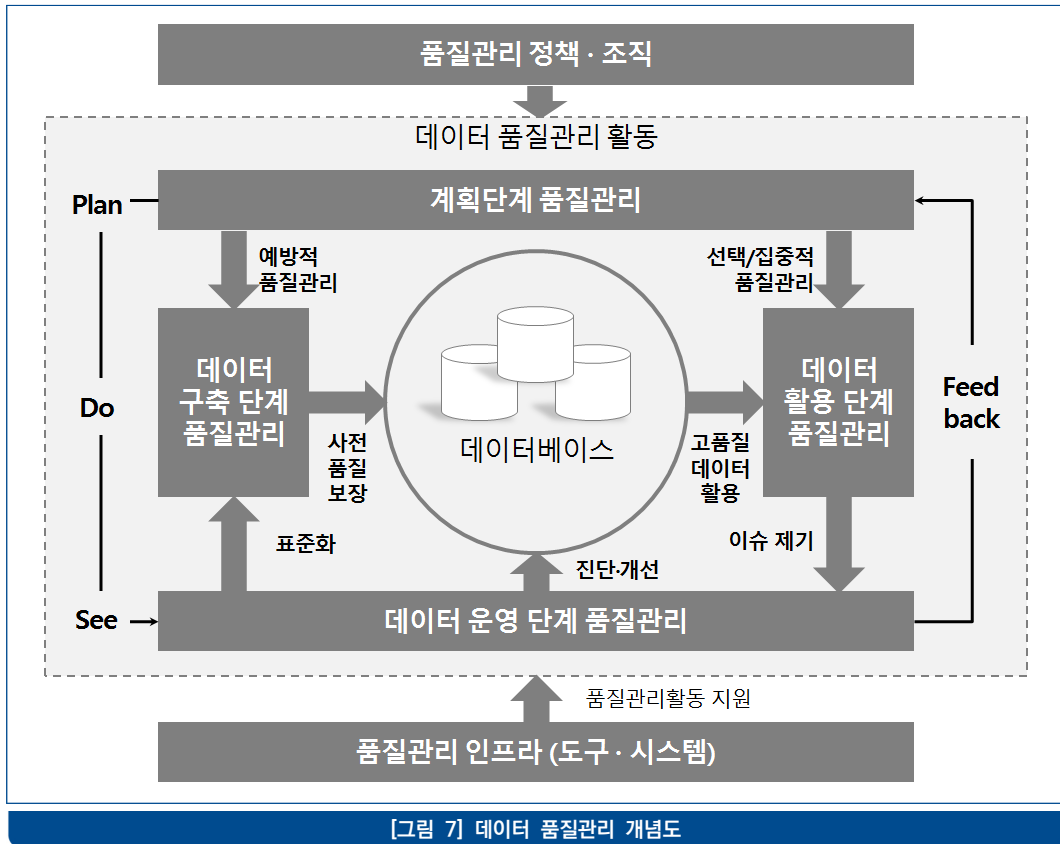
- 변한 실시간 정보를 앱/웹 등 서비스 개발에 쉽게 활용할 수 있도록 표준화하여 개방
- 국가데이터맵이란 모든 기관이 보유한 개방 가능한 데이터의 소재정보 및 연관관계를 쉽게 검색하여 찾아볼 수 있는 데이터 관계도이다.³³⁾ <그림 6>과 같이 국가데이터는 16개 분야로 대분류되어 있다.



- “데이터 품질(Data Quality)”이란 “데이터의 최신성, 정확성, 상호연계성 등을 확보하여 이를 사용자에게 유용한 가치를 줄 수 있는 수준”으로 정의할 수 있다. 이러한 데이터 품질을 사용자 관점에서 지속적으로 유지하거나 향상시키기 위해서는 체계적인 관리와 활동이 필요하다. 따라서 “데이터 품질관리(Data Quality Management)”란 사용자에게 유용한 가치를 제공 하도록 “데이터의 품질을 확보하기 위한 품질 목표 설정, 품질 진단 및 개선 등 일련의 활동과 이를 지원하기 위한 관련 도구”를 의미한다.
- 일반적으로 데이터 품질관리는 데이터 구축 이후 운영 및 활용단계에서 이루어지는 업무로 인식되어 왔다. 그러나 범정부 차원의 공공기관 품질 진단 사업 등의 결과를 살펴보면, 주요 품질 이슈에 대한 원인이 데이터의 운영 및 활용 단계를 포함한 정보시스템 구축 단계의 품질 관리 활동 부재에서도 그 원인을 찾을 수 있다. 공공기관이 품질관리 활동을 하는 과정은 <그림 7>의 품질관리 개념도로 설명할 수 있다. 데이터의 구축부터 운영, 활용까지의 정보 생명주기(Life Cycle)를 고려하여 전 단계에 걸쳐 적용되는 체계를 확보하도록 데이터 품질 관리를 체계화하여야 한다.³⁴⁾

33) <https://www.data.go.kr/tcs/opd/ndm/view.do>

34) <https://www.data.go.kr/ugs/selectPublicDataQlityView.do>



IV

양적추론을 위한 기초수학

1. 수리력	63
2. 산술	64
3. 대수	68
4. 기하	71
5. 함수	72
6. 확률	78
7. 통계	81



IV. 양적추론을 위한 기초수학

- 우리는 생활 수량을 숫자로 변환한 다음, 덧셈과 같은 산술 규칙을 사용하여 숫자를 처리한다. 다루고자 하는 대상 또는 실제 금액을 정확히 지정하지 않고, 자산의 통합과 같은 절차를 설명할 때, 실제 숫자 대신 x, χ, \aleph 와 같은 변수를 사용한다. 문자로 표현한 숫자를 다룰 때 대수(代數)법칙을 사용하는데, 이는 가상의 산술이다. 숫자를 문자로 바꾸어 대수법칙을 사용하는 산술을 대수학이라고 한다. 여러 대상을 포함한 미래의 사건이나 데이터를 숫자로 처리하는 과정에서 확률과 통계를 사용해야 한다.

1 수리력

- 기본적인 수리력(수를 편안하게 다루는 능력)은 시간과 경험을 통해 개발되지만, 몇 가지 가이드라인은, 숫자가 하는 일을 어떻게 알려주는지를 독자가 이해하는 데 도움이 될 수 있다. 계산기는 계산에 도움이 되지만 값의 크기나 비교에 대한 느낌을 줄 수 없으므로, (수를 직접 다루는) 기술이 중요하다.
- 사람들 대부분은 (분수를) 소수로 표현하면 그 양을 감각적으로 바로 알 수 있으므로 (분수보다) 소수 전개가 더 익숙하다. 예를 들어, $4/7$ 과 $7/12$ 을 비교할 때, 정확하지 않더라도 $4/7 \approx 0.57143$, $7/12 \approx 0.58333$ 이라는 근삿값으로 나타내, $4/7 < 7/12$ 임을 쉽게 알 수 있다.
- 분수는 무한한 소수로 전개될 수도 있다(분수는 순환하는 소수이지만, $\sqrt{2}, \pi, e$ 와 같은 무리수는 순환하지 않는 무한 소수로 전개된다). 따라서 정확한 소수 표현은 한계가 있어서 분수 표현이 (수학적으로) 더 정확하지만, 실제 상황에서는 그렇게 정확하지 않아도 된다.
- 시간당 \$30을 받는 정규직으로 일하면 연봉은 얼마가 될까? 주 40시간 근무와 1년 50주 근무를 가정하는 것이 가장 좋다. 그러면 주당 40시간씩 50주를, 시간당 \$30으로 일하면 $30 \times 40 \times 50$ 달러가 된다. 이 숫자는 끝에 0이 3개 있으며 앞자리 수는 $3 \times 4 \times 5$ 이다. 앞자리 수는 먼저 $4 \times 5 (= 20)$ 을 계산하고, 거기에 3을 곱하면 60이 된다. $3 \times 4 = 12$ 를 먼저 계산하기가 더 쉽다고 생각한다면, 시곗바늘을 상상하여 자동으로 $12 \times 5 = 60$ 을 계산할 수 있다. 이 방법이 어렵다면 5×12 는 $5 \times 10 + 5 \times 2$ 와 같으므로, $50 + 10 = 60$ 으로 계산해

도 된다. 어쨌든 정규직 사원은 연봉 \$60,000을 받는다. 이런저런 계산을 하다 보면, 급여 계산에 관한 규칙을 추론할 수도 있다. 연봉은 시간당 급여를 두 배 한 다음 0을 세 개 덧붙이면 알 수 있다.

- 정확한 값을 계산하기가 복잡할 때 어림짐작을 사용하면 문제의 감각을 느낄 수 있다. 29×31 대신 $30 \times 30 = 900$ 으로 생각하면 크게 틀리지 않는다. 두 숫자가 모두 30에 가깝기 때문이다. 더 좋은 점은, 첫 번째 숫자는 조금 더 작고 두 번째 숫자는 조금 더 크므로 근사치의 오류가 완화된다는 것이다. 정확한 값은 899인데 이는 직관적으로 계산한 900과 별 차이가 없다. 정확한 답이 필요하지 않은 경우, 29×31 을 30×30 으로 추정해도 매우 근사한 결과가 나온다.

계산기 문제

계산기는 $78.53 \div 9.21$ 을 계산하기에 적합하지만, 계산과정은 옳은 이유를 알려주지 않는다. 그리고 78.53 대신 7853으로 입력하여 852.70이라고 답이 나와도, 소수점을 바뜨렸다는 사실을 말해주지 않는다. 계산기는 사용에 제한이 있으며, 위험성도 있다.

- 수리 능력을 대신할 수 없다.
- 여러분의 이해를 도울 수 없다.
- 항상 시간을 절약하는 것은 아니다.
- 여러분이 틀렸을 때 말해주지 않는다.

- 1.4×7.3 은 얼마일까? '7.3 더하기 [0.4 곱하기 7.3]', 또는 '7.3 더하기 [7.3의 절반]'보다 약간 작은 값(또는 3 정도)이다. 이러면 10.3 정도로 (쉽게) 추측할 수 있다(실제 답은 10.22). 243×552 는 어떨까? 우선 [2백 곱하기 5.5백] 더하기 [0.4백 곱하기 5.5백]으로 생각한다. 2 곱하기 5.5는 11이므로, 답은 11백 \times 백 더하기 2.2백 \times 백 정도로, 13백 \times 백 또는 130,000 정도로 추산할 수 있다. (실제 답은 134,136이다.)

2 산술

1) 지수

- $2^3 \cdot 2^5$ 는 $(2 \cdot 2 \cdot 2) \times (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ 라는 의미이다. 첫 번째 항에 인수 2가 3개 있고 두 번째 항에 인수 2가 5개 있으므로, 모두 3 + 5 또는 8개의 인수 2가 있으므로,

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8$$

- 이다. 마찬가지로 $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$ 이다. 하지만 $2^a \cdot 3^b$ 는 간단하게 만들 수 없다.
- $2^3 \cdot 5^3$ 는 $(2 \cdot 2 \cdot 2) \times (5 \cdot 5 \cdot 5)$ 인데, $(2 \cdot 5)^3$ 으로 쓸 수 있다. 이 규칙은 다음과 같이 정리할 수 있다: $a^x \cdot b^x = (ab)^x$.
 - 이제 $3^a \cdot 3^a = 3^{a+a}$ 라면, $3^{1/2} \cdot 3^{1/2} = 3^1 = 3$ 이다. $3^{1/2}$ 이 어떤 수이든 제곱하면 3이다. 따라서 $3^{1/2}$ 는 3의 제곱근, 즉 $3^{1/2} = \sqrt{3}$ 이다. 마찬가지로, $3^{1/3} \cdot 3^{1/3} \cdot 3^{1/3} = 3$ 이므로 $3^{1/3}$ 은 3의 세제곱근인 $\sqrt[3]{3}$ 이다. 이제 $3^4 = 3^{0+4} = 3^0 + 3^4$ 이니까 $3^0 = 1$ 이다. 그리고 $3^{-1+1} = 3^{-1} \cdot 3^1 = 3^0 = 1$ 이므로 $3^{-1} = 1/3$ 이다. 지금까지 세 가지 법칙을 설명하였는데 요약하면,

$$a^0 = 1, a^{-1} = \frac{1}{a}, a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

이다. 이제 $(a^4)^3$ 은 $a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \times (a \cdot a \cdot a \cdot a) \times (a \cdot a \cdot a \cdot a)$, 또는 $a^{4 \cdot 3}$ 이다. 왜냐하면 a 네 개가 세 그룹을 이루고 있기 때문이다. 일반적으로,

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

이다. 예를 들어 $(3^{1/n})^n = 3^{n/n} = 3$ 이므로 $3^{1/n}$ 은 3의 n -제곱근이다.

2) 로그

- 더하기를 취소하려면 빼기를 한다. 곱셈을 취소하려면 나눗셈을 한다. 지수화를 취소하려면 로그를 사용한다. 따라서 $10^3 = 1,000$ 이면, $\log(1,000) = 3$ 이다. 그러면 $\log(1,000,000)$ 은 얼마일까? 답은 6. 10을 6제곱하면 1,000,000을 얻는다. 1,000,000의 로그를 취하면 6을 되돌아온다. 로그는 거듭제곱(10의)을 나타내는 수이다. 다시 말해,

$$\log(10^x) = x \text{ 그리고 } 10^{\log x} = x$$

이며 지수법칙으로 $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$ 이므로 $\log(10^a \cdot 10^b) = a + b = \log(10^a) + \log(10^b)$ 이다. 따라서 곱하기의 로그는 로그의 더하기로 바뀐다.

(A1)
$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

- 이것은 로그가 지수화의 취소이므로, 거듭제곱의 지수가 더하기이면 각 거듭제곱의 곱이라는 규칙의 거꾸로이다. 그리고 $(10^y)^x = 10^{xy}$ 이므로, 양쪽에 로그를 취하면 $\log((10^y)^x) = xy = x \log(10^y)$ 이다. 10^y 을 어떤 양의 수 a 라고 하면,

$$\log(a^x) = x \log a$$

임을 알 수 있다. 10^x 라는 수는 10을 x 번 곱한 것이므로, $10^x \cdot 10 = 10^x \cdot 10^1 = 10^{x+1}$ 이다. 마찬가지로 $\log(y)$ 가 1만큼 커지면 10을 한 번 더 곱한 것과 같다.

- 여기에 반드시 10일 필요는 없다. 아무 숫자나 사용할 수 있다. 2의 거듭제곱을 취소하는

것은 함수 \log_2 또는 “밑이 2인 로그”로 계산한다. 따라서 $\log_2(2^5) = 5$ 이다. \log_2 도 규칙 (A1)을 따른다.

- 특별한 수, $e = 2.71828\dots$ 는 자주 나타나는데, 이때는 "자연로그"라고 하며, \log_e 대신 자체 기호 \ln 로 표시한다. 위의 (A1)에서 자연로그를 생각하면

$$(A2) \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

이고,

$$\ln(e^x) = e^{\ln x}$$

이다. 마찬가지로, $(e^y)^x = e^{xy}$ 이니까,

$$\ln(a^x) = x \ln(a)$$

이다. 관련하여 몇 가지 더 복잡한 규칙이 있다. 우선, 다음과 같다.

$$\log_a(b)\log_b(c) = \log_a(c)$$

- 이 수를 a 의 거듭제곱으로 취하면, 오른쪽은 c 인데($a^{\log_a c} = c$), 왼쪽도

$$a^{\log_a(b)\log_b(c)} = (a^{\log_a(b)})^{\log_b(c)} = b^{\log_b(c)} = c$$

이다. 특히 이 식을 다시 쓰면, $\log_a(b)\log_b(a) = \log_a(a) = 1$ 이므로, $\log_b(a) = 1/\log_a(b)$

이다. 두 식을 종합하면

$$\log_b(c) = \log_a(c)/\log_a(b)$$

임을 알 수 있다. 계산기에 밑이 2인 로그가 없더라도, 이 식을 사용하면 $\log_2(x)$ 를 계산할 수 있다. 그리고 $\log_2(x) = \log_a(x)/\log_a(2)$ 이고, 이 경우 a 는 10이나 e 등 어느 것이든 택할 수 있다. $\log_2(x) = \log(x)/\log(2) = \ln(x)/\ln(2)$ 이다.

3) 조합

- 사물을 세는데 가장 필수적인 요소는 산술이다. 10명이 있고 각각 다리가 2개 있는 경우, 다리의 수는 $10 \times 2 = 20$ 이다. 다리에 발가락이 각각 5개이면, $10 \times 2 \times 5 = 100$ 개의 발가락이 있다. 다이얼식 자물쇠는 각각 9개의 숫자가 있는 4개의 실린더가 있으므로, 총조합의 수는 $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4 = 6,561$ 이다. 또한 선택의 종류도 셀 수 있다. 샌드위치 체인점에서 주문하면서, 다음 메뉴에서 빵, 고기 및 치즈를 선택한다고 하자.

빵	고기	치즈
화이트	로스트비프	프로볼로네
호밀	치킨	체다
밀		스위스
		윈스터

- 그러면 빵 세 가지, 고기 두 가지, 그리고 빵과 고기 선택에 대해 각각 치즈 4가지를 선택할 수 있으므로, 샌드위치의 종류는 $3 \times 2 \times 4 = 24$ 이다.
- 이제 다이얼식 자물쇠가 같이 숫자를 두 번 사용할 수 없다면 어떨까? 그러면 첫 번째 숫자는 9개의 선택이 있지만, 첫 번째 숫자의 각 선택에 대해 두 번째 문자의 나머지 선택 항목은 8개, 세 번째 숫자는 7개, 네 번째 숫자는 6개로, 총 $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3,024$ 선택이 있다.
- 잠시 다른 문제를 생각해보자. ABCDE 문자를 배열하는 방법은 몇 가지일까? 앞의 경우와 매우 유사하다. 첫 번째 문자(A, B, C, D 또는 E) 5개 선택, 다음 문자 4개 등 : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 종류가 있다. 계승 기호 5!는 5부터 하나씩 작아지는 수의 곱을 말한다. 따라서 답은 5!이다.
- 9개 숫자에서 반복되지 않는 4개 숫자를 나열하는 다이얼식 자물쇠 문제로 돌아가서, 다음과 같은 계승 표기법으로 답을 작성할 수 있다.

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{9!}{5!} = \frac{9!}{(9-4)!}.$$

- 다이얼식 자물쇠 대신, 네 개의 서로 다른 번호로 만드는 "픽-포" 복권 티켓 문제는 더 까다롭다. 이 경우 서로 다른 번호의 순서는 중요하지 않기 때문이다. 예를 들어, 4-순서쌍 (2,5,8,7) 과 (8,2,5,7)은 같은 복권 티켓이다. 그리고 자물쇠처럼 $9!/5!$ 로 계산하면, 중복계산이 발생하여, 전체 종류보다 많아진다. 중복계산은 4개의 다른 숫자를 나열하는 방법(순열)의 수와 같다. 이 수는 4!. 그래서 중복계산이 들어 있는 경우의 수를 이 수로 나눠야 하고, 답은 $9!/(5! 4!)$ 이고, 보통 $\binom{9}{4}$ 라고 쓴다. "9개 중 4개 선택"이라고 읽는 이 표기법은 유용하다. 중복되는 경우를 제외(non-double)한 주사위 두 개 굴리기의 종류를 세고 싶다면, 복권 티켓의 간단한 버전으로, 1~6에서 고른 서로 다른 숫자의 2-순서쌍을 세면 된다. 즉, $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \cdot (4 \times 3 \times 2 \times 1)} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ 이다. 실제로 나타나는 주사위의 종류를, 작은 수 먼저 쓰기로, 모두 나타내면;

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)

이다. 일반적으로 n 개에서 k 개를 선택하는데, 순서를 정하지 않으면, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 종류가 있다. 참고로 n 개에서 k 를 선택하는 것은, n 개에서 $n-k$ 개를 남기는 것과 같으므로 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 이다.

3 대수

1) 변수의 필요성; 공식의 가치; 추상화의 경우

- 초등학교 산수 문제로 $3 + \square = 7$ 을 생각하자. 또 $8 + \square = 13$ 을 풀어보자. 이런 문제를 몇 개를 풀다 보면, 곧 사각형의 숫자가 오른쪽에 있는 숫자에서 왼쪽에 있는 숫자를 뺀 값이라는 것을 알게 된다. $3 \times \square - 1 = 11$ 또는 $2 \times \square = \square + 3$ 과 같은 문제는 해결할 수 있다고 해도, 방정식 $3 + x = 7$, $8 + x = 13$, $3x - 1 = 11$, $2x = x + 3$ 을 만나기까지는 몇 년이 걸린다. 하지만 이것들은 사실 모두 똑같다. \square 이 x 로 바뀌었을 뿐이다. 이러한 문제는, 알고 있는 관계식(방정식)을 기반으로 알 수 없는 양 x 의 값을 찾는 것이다.
- 값을 모르는 수량을 나타내기 위해 x 와 같은 문자변수를 지정하는 것이 편리하다. 실생활에 응용하는 문제에서는, 몇 가지 알고 있는 정보(예: 세금 및 20% 팁이 포함된 신용카드 영수증)를 기반으로 관심 수량(예: 청구 금액)을 결정할 수 있다.
- 변수(예: x , 어떤 문자라도 사용할 수 있음)는 관심 있는 수량이다. 방정식은 그것이 만족하는 관계식이다. 대수는 “ x 를 구할 수 있는” 도구 상자이다.
- 사실, 약간 더 정밀하게 말하자면, 모든 초등학교 문제의 기본형식은 한가지이다.

$$(A3) \quad ax + b = cx + d,$$

- a, b, c, d 의 여러 가지 숫자 - 방정식을 해결하는 방법(공식)이 있으면, 이 숫자들에 따라 항상 문제를 해결할 수 있다.
- 변수가 수행하는 이중 역할에 유의하라. (1) 알 수 없는 수량에 대한 "네모 칸"이 될 수 있으며 나중에 결정한다(예: 위와 같이 $3 + x = 7$ 과 같은 방정식이 있을 때). (2) 분배법칙 $a(b + c) = ab + ac$ 와 같이, 임의의 숫자를 대신하면, 한 가지 공식으로 무한한 수의 가능성을 처리할 수 있도록 한다.
- 방정식 (A3)는, $a \neq c$ 이면 $x = \frac{d-b}{a-c}$ 로 항상 풀 수 있다. 하지만 $a = c$ 이면 두 가지 결과가 있다. 만약 $b = d$ 이면 값이라도 x 가 될 수 있으며, $b \neq d$ 이면 방정식은 해가 없다.
- 실생활에서, 일부 수량(대출 잔고, 파리 마릿수, 방사성 동위 원소의 양, 구운 감자의 온도 등)은 대수를 사용하면 관심의 양을 나타내는 변수 (또는 문자)를 할당할 수 있을 뿐만 아니라, 다른 파라미터(이자율, 출생률, 붕괴율, 열전달 계수 등)도 지정할 수 있다. 이런 식으로 일반적인 문제를 해결하여, 다양한 상황에 적용할 수 있다. 나중에 살펴보겠지만, 지수함수로 이러한 모든 시스템의 동작을 설명할 수 있다. 변화하는 파라미터 (a, b) 를 사용하여, ab^t 와 같은 지수함수로 나타내면, 많은 응용문제를 한 번에 처리할 수 있다.

2) x 구하기; x, y 구하기

- $3x + 77 = 146$ 을 알고 나면, x 값을 구하기 위해 x 를 추출하여야 한다. $+77$ 을 없애려면 77 을 '더하기의 반대', 즉 77 빼기를 해야 한다. 왼쪽만 77 을 빼면 안 되고, 양쪽에서 동일하게 해야 한다. 양변에서 77 을 빼면 $3x + 77 - 77 = 146 - 77$ 또는 $3x = 69$ 가 된다. 이미 답을 짐작할 수 있겠지만, x 를 분리해내는 과정을 계속해 보겠다. $3x$ 는 x 에 3 을 곱한 것이니, 3 으로 나누는 '반대'를 수행해야 한다. 따라서 $3x/3 = 69/3$ 이고, $x = 23$ 임을 알 수 있다. x 가 =의 양쪽에 있으면, 한쪽으로 모아야 한다.

$2(x+7) - 15 = 6(x-4) - 13$	먼저 양쪽을 전개한다.
$2x + 14 - 15 = 6x - 24 - 13$	이제 단순화한다.
$2x - 1 = 6x - 37$	양쪽에 1 을 더한다.
$2x = 6x - 36$	양쪽에서 $6x$ 를 뺀다.
$-4x = -36$	-1 을 곱한다 (더 보기 좋게 만들기 위해).
$4x = 36$	양쪽을 4 로 나눈다.
$x = 9$	

- 때로는 두 개의 변수(예 : x 와 y)와 두 개의 방정식이 있는 때도 있다.

$$3y - x = 4, \quad 2x + 3y = 19$$

- 첫 번째 방정식의 양쪽에 x 를 더하면 $3y = x + 4$ 가 되고, x 를 분리하기 위해 4 를 빼면, $x = 3y - 4$ 가 된다. 이제 두 번째 방정식에서 x 대신 $3y - 4$ 을 대입하면

$$2(3y - 4) + 3y = 19.$$

왼쪽을 전개하면

$$6y - 8 + 3y = 19,$$

또는 $9y - 8 = 19$ 인데, 다시 양쪽에 8 을 더하면 $9y = 27$ 이다. 9 로 나누면 $y = 3$ 임을 알 수 있다. 다시 $x = 3y - 4$ 라는 첫 번째 방정식의 해로 돌아가서, $y = 3$ 이므로, $x = 3 \cdot 3 - 4 = 5$ 이다. 따라서 $x = 5, y = 3$ 이다.

- 마지막으로 원래 방정식을 만족하는지 검사한다!
- 요약하면, 두 개의 변수 (예 : x 와 y)인 두 개의 '연립'방정식을 풀려면 먼저 변수 중 하나 (예 : y)가 상수인 것처럼 생각하여, 첫 번째 방정식을 푼다. 그러면 ' $x = \text{무엇}$ '이 된다. 이제 두 번째 방정식에서 x 대신 ' 무엇 '으로 바꾼다. ' 무엇 '에는 y 가 들어 있지만 x 는 없으므로, 두 번째 방정식에는 y 만 있다. y 에 대해 두 번째 식을 풀면 y 를 알 수 있고, ' $x = \text{무엇}$ '에서 x 의 값을 알아낸다.

3) 문장제 문제

- ‘대수는 문장제 문제’를 의미한다. 어떤 의미에서 이 책은 정말 복잡한 문장제 문제에 관한 것이다. 대부분의 간단한 문장제 문제는 몇 가지 기본 단계를 통해 접근할 수 있다. 어떤 데이터는 알고 있고, 일부는 모르며, 모르는 데이터에서 아는 것을 찾아내는데 필요한 정보가 있다. 이러한 데이터 조각들은 숫자로 표시되며 아직 숫자를 모르기 때문에 데이터를 신중하게 선택한 문자로 표시하며 숫자를 찾아낸다. 때로는 문자로 추론하는 것이 너무 추상적일 수 있으므로 상수(가능하면 쉬운 숫자로)인 것처럼 위장할 수도 있다. 가끔 저자는 숫자 2를 쓰고 문자 R 처럼 보일 때까지 마사지하기도 한다.
- 그런 다음, 단어의 정보를 방정식으로 확실히 표현한다. 전체 이야기를 끝낼 때까지 각 정보를 수학적 표현으로 변환하라. 즉, 주스가 더는 없을 때까지 오렌지를 계속 짜내는 식이다.
- 예를 드는 것이 좋겠다. 2014년 12월 28일 뉴욕 타임스는 영화 “인터뷰”에 대해 다음과 같이 보도했다.

“인터뷰는 처음 4일간, 온라인 판매와 대여를 통해 약 \$1,500만의 이익을 얻었다고, 소니픽처스는 선데이지에 밝혔다. 소니는 온라인 판매는 개당 \$15이고 디지털 대여는 개당 \$6이지만 매출 비율은 밝히지 않았다. 스튜디오는 전체적으로 약 200만 건의 거래가 있었다고 말했다. 각각의 거래 건수는?”

- 기자는 (우리가 지명하지 않을) 이것을 대수 문제로 보지 못했다.
- 대여 횟수를 R 이라고 하고 판매 횟수를 S 라고 하자. 총 2,000,000건의 거래가 있었다는 것이 마지막 문장이었다. 이를 숫자식으로 변환할 수 있다 : $R + S = 2,000,000$. 엄청나게 큰 수이다. 또 무엇을 알고 있는가? 총 온라인 판매 및 렌탈 (첫 번째 단락)에 수익이 \$15,000,000이었고, 렌탈과 판매비용 (나머지 문장)을 알고 있다. 이 수치가 처음 4일 동안의 정보이고, 스튜디오가 소니 픽처스라는 사실은 우리가 해결해야 하는 질문과는 관련이 없다.
- 이제 나머지 부분을 숫자식으로 변환해 보자. 분석을 간단히 하기 위해 렌탈이 두 개뿐이라고 가정하자. 그러면 임대료로 $\$12 = 2 \times \6 을 얻는다. 이 패턴에 따라 R 개 대여하면 $\$6R$ 을 얻는다. 마찬가지로 S 개를 판매하면 $\$15S$ 를 번다. 따라서 총액은 $6R + 15S$ 로 \$15,000,000이다.

$$R + S = 2,000,000,$$

$$6R + 15S = 15,000,000.$$

- 첫 번째 방정식은 $R = 2,000,000 - S$ 로 바꿀 수 있다. (또는 ' $S =$ '으로 바꾸어도 된다. 두 번째 방정식에서 이 R 값을 사용한다.

$$6(2,000,000 - S) + 15S = 15,000,000.$$

분배법칙을 사용하고 같은 항을 정리하면,

$$9S = 3,000,000.$$

양변을 9 나누면 S 를 구할 수 있지만, S 가 분수값이라는 것을 알 수 있다. 우리는 이것이 현실에 대한 수학적 모델에 불과하다는 것을 기억해야 한다. 비디오 판매와 같이 단순할 때는 없다! 아무튼 분수 S 를 가장 가까운 정수로 반올림하여 고친다. (이 기사에서는 총 거래 수가 '약' 2,000,000개이므로 어쨌든 모두 근삿값이다.)

$$S = 333,333, \quad R = 2,000,000 - S = 1,666,667.$$

- '약'이라고 했으니, 이 값들을 가장 가까운 1만 또는 십만 단위로 반올림한다. 그러나 대수학의 문제로 계산하는 것은 어렵지 않았다. 문장제 문제를 풀기 위한 몇 가지 빠른 팁으로 '그리고'는 더하기, '의'는 곱하기, '당'은 나누기, '%'는 100으로 나누기이다.

4 기하

- 기하의 기본 규칙은 피타고라스 정리이다. 직각 삼각형에서 빗변(긴 변)의 길이를 c 라고 하고, 다른 두 변의 길이를 a 와 b 라고 하면, $c^2 = a^2 + b^2$ 이다. 이를 통해 다각형을 (오른쪽) 삼각형으로 나누면, 어떤 다각형이라도 둘레를 계산할 수 있다.
- 원부터 시작한다. 먼저 원의 지름은 반지름의 두 배인 거리이다. $d = 2r$. 다음으로 숫자 π 는 원의 지름에 대한 원주의 비율로 정의되었다. 즉, 원주는 지름의 π 배, 즉 πd 또는 $2\pi r$ 이다. 이제 원의 일부인 호의 길이는 중심각에 비례한다. 예를 들어 중심각이 π 인 반원의 길이는 $\pi r = (\pi/2\pi)(2\pi r)$ 이다. 중심각을 (라디안이 아닌) 각도(a°) 단위로 표현할 때는 원의 중심각 360° 을 기준으로 한다.
- 예를 들어 반경이 90피트인 원을 따라 30도 부채꼴 모양의 땅에 울타리를 치고 싶다면 울타리 재료가 얼마나 필요한지 결정할 수 있다. 90 피트의 직선 울타리 2개와 곡선 울타리 1개가 있다. 호의 길이는 원둘레의 $30/360 = 1/12$ 이므로 $(1/12)2\pi \cdot 90$ 피트이다. 따라서 전체 울타리 둘레 길이는 $180 + (1/12) \cdot 2\pi \cdot 90 = 180 + 15\pi \approx 230$ 피트이다.
- 환경 엔지니어 작업에서는, 지구 표면(지구는 약 4,000마일 반경의 구체)에서 높이 10마일부터 20마일 사이의 성층권 부피를 추정할 수 있다. 그러려면 반경이 4,020마일인 구체의 부피에서 반경이 4,010마일인 구체의 부피를 뺀 값을 계산하면 된다. 반지름 r 인 구의 부피가 $(4/3)\pi r^3$ 이므로, 성층권의 부피는 $(4/3)\pi(4,020^3 - 4,010^3) \approx 20$ 억 세 제곱마일이다.

대상	부피	설명
정육면체	l^3	변의 세제곱
직육면체	lwh	폭 곱하기 변 곱하기 높이
공(구)	$(4/3)\pi r^3$	$(4/3)r^3$ 곱하기 공의 반지름
원통(기둥)형	$\pi r^2 h$	밑넓이 곱하기 높이
원뿔(콘)	$(1/3)\pi r^2 h$	밑넓이 곱하기 3분의 1 곱하기 높이

- 예를 들어, 수직 벽이 5피트이고 바닥(모든 모양)면적이 600ft^2 인 수영장에 채울 수 있는 물의 양을 계산하려면 기둥 공식을 사용한다: $600\text{ft}^2 \times 5\text{ft} = 3,000\text{ft}^3$.

5 함수

- 실용적 문제에서, 우리는 시스템, 사건, 변형, 절차 등 변화가 일어나는 과정은 무엇이든 연구한다. 프로세스 종료 상태는 시작 상태와 다를 수 있다:

START ~~~> 무슨 일이 일어난다. ~~~> END.

- 예를 들어, 은행 계좌를 개설할 때의 입금액이 초기 상태라고 하면, 이자 발생은 이벤트이다. 증가한 잔액은 시스템의 최종 상태가 된다. 잔액의 2%를 이자로 받는다면 이벤트를 모형화하는 함수는 "1.02로 곱하기"이다. 시작하는 은행 잔액과 관계없이 이 프로세스를 설명하기 위해, 변수를 입력값으로 모형화한다.

x ~~~> multiply by 1.02 ~~~> $1.02x$

- 변수는 어떤 문자를 사용하여 관계없다: x 가 단지 편리해서이다. "제공" 함수로 모형화할 수 있는 프로세스도 있다.

x ~~~> 제공하기 ~~~> x^2 .

- 함수는 입력 숫자가 주어지면 출력 숫자를 생성하는 규칙이다. 함수 f 를 호출하고 입력 숫자 x 를 호출하면 출력은 $f(x)$ 로 기록된다.

x ~~~> f ~~~> $f(x)$

f 가 "제공하기" 함수이면 $f(x) = x^2$ 가 된다. 예를 들어 $f(3) = 3^2 = 9$ 이다. 다른 예로, t 를 은행 계좌를 개설한 이후의 날짜 수라고 하자. $B(t)$ 는 t 일 후 잔액을 달러로 나타낸다. 1주 후 잔액은 $B(7)$ 이다. 두 번째 주의 마감 잔액 평균은 $(1/7)(B(8) + B(9) + \dots + B(14))$ 이다. 즉, 8일부터 14일까지 잔액 합계의 7분의 1이다.

1) 그래프

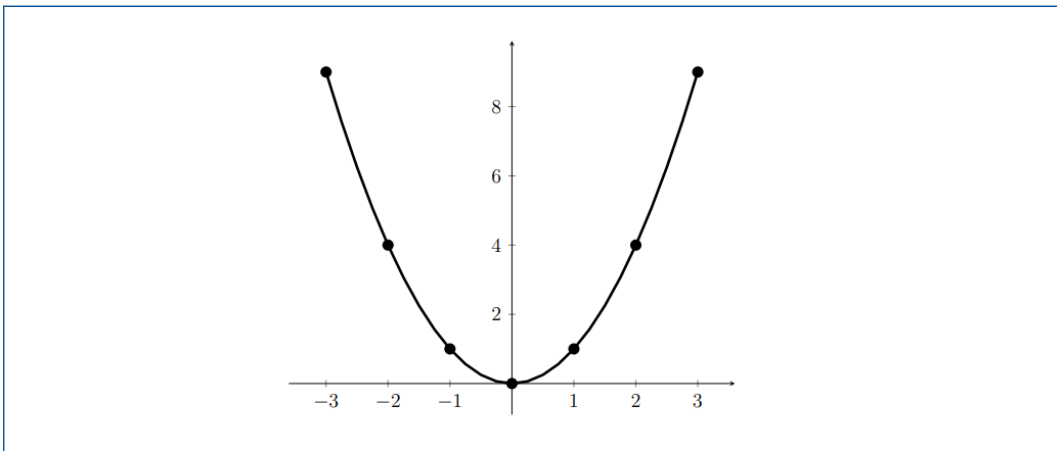
- 입력값과 출력값의 숫자 쌍은 평면에 점으로 그릴 수 있으며, 이러한 모든 쌍을 표시하면 함수의 그래프가 된다. 다르게 말하면 그래프의 점은 모두 점 (x,y) 이며, 여기서 x 가 입력값이고 y 가 출력값이다. 즉, $y = f(x)$ 이다.
- '제공하기' 함수, $f(x) = x^2$ 을 생각하자. $y = f(x)$ 의 그래프에 있는 점들은 방정식 $y = x^2$ 을 만족하는 (x,y) 들이다. 다르게 표현하자면 (x, x^2) 형태인 모든 점이다. 몇 가지 순서쌍을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	2	9

- <그림 8>에 위의 점(글머리 기호)들과 그 밖의 많은 점(곡선)을 표시하였다. 면적이 8인 정사각형의 변 길이를 알고 싶다면 그래프를 사용하여 답을 근사할 수 있다. y 축을 따라 $y = 8$ 인 지점까지 올라간 다음 수평선을 그린다. 그러면 두 점에서 그래프와 만난다. 이 지점에서 다시 수직으로 내려와 x 값을 찾는다. 약 ± 2.8 이다. 길이는 양수이어야 하므로 이들 중 하나만 가능한 길이이다. 따라서

$$\sqrt{8} \approx 2.8$$

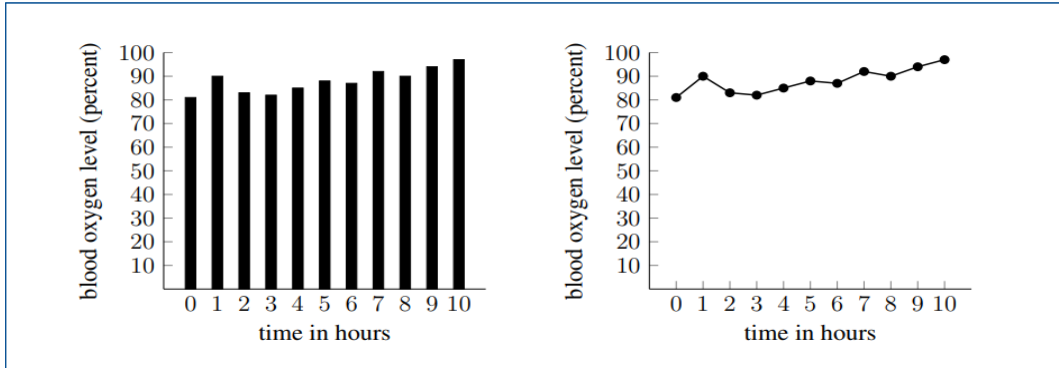
이라는 근삿값을 얻을 수 있다. 물론 이 근사치를 그래프로 짐작하는 대신 계산기를 사용할 수 있었다. 하지만 그래프의 의미를 전혀 이해하지 못했을 것이다. 이 근삿값이 얼마나 괜찮을까? 계산기를 사용해 보면 (또는 직접 계산해 보라.) $2.8 \times 2.8 = 7.84$ 으로 나쁘지 않다.



[그림 8] 함수 $f(x) = x^2$; $-3 < x < 3$ 의 그래프

2) 그래프 표현

- 때때로 함수는 x 의 특정한 값에서만 정의되기도 한다. 예를 들어 누군가의 혈중 산소 수치농도를 매시간 측정하면 {81, 90, 83, 82, 85, 88, 87, 92, 90, 94, 97}과 같은 데이터를 얻을 수 있고, 막대그래프나 선 그래프로 나타낼 수 있다:



- 오른쪽 선 그래프에서 검은 점이 실제 데이터이다. 먼저 그래프의 한 점을 들여다보고 그것에 대해 모든 것을 잘 알게 되었는지 확인하면 그래프를 잘 이해할 수 있다.
- 선 그래프는 실제 데이터가 아닌 수치도 그리고 있다. 이는 수치 사이의 산소 수준을 나타낸다. 선 그래프는 측정 사이에 무슨 일이 일어났는지 시각화하는 데 도움이 될 수 있으나, 혼란을 줄 수도 있다. 특히 발표자가 사실과 허구를 모호하게 만드는 경우 독자에게 혼란을 준다. 또한 두 그래프 모두에서 모든 작업이 80에서 100 사이에서 발생하기 때문에 0에서 100까지의 전체 범위를 나타내는 것은 지나치다. 그렇다고 80부터 100까지만 나타내는 것도 문제이다. 밑바닥에 있는 값 80을 보고 "0"이라고 생각하게 될 것이다. 또한 범위를 압축한 그래프는, 예를 들어 의도적으로 효과를 축소하는 것처럼, 기만적으로 사용될 수도 있다(분기별 보고서의 과장된 판매액도 그렇다).
- 그래프를 보면 평균 기록을 시각적으로 알 수 있지만 (여기에서는 80이 넘는 것으로 보인다)
 - 실제 평균값 88.1을 알 수는 없다. 또한 그래프를 보면 가장 높은 상승 (첫 1시간) 또는 가장 가파른 하락 (2번째 시간) 지점이나, 추세(증가)가 어떤지, 최댓값(10시간) 또는 최솟값(0시간)이 언제 기록되었는지 빠르게 알 수 있다.

3) 선형 함수

- 선형함수 f 를 변수 x 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$f(r) = mx + b.$$

숫자 b 는 $x=0$ 에서 시작하는 값을 나타내고 m 은, x 값이 한 단위 증가하면 출력이 m 만큼 씩 증가하므로, 함수가 각 단계에서 얼마나 증가하는지를 나타낸다. (왜 증가하는가? 분배법칙에 의해 $m(x+1)$ 이 mx 보다 m 단위만큼 더 크다는 것을 알 수 있기 때문이다.) 함수를 그래프로 나타낼 때 m 이 크고 양수이면 왼쪽에서 오른쪽으로 급격히 증가하므로 m 을 기울기라고 한다. x 가 0일 때 함수값은 b 이다. 그래프 $y=f(x)$ 는 점 $(0,b)$ 에서 y 축과 만나므로, b 를 y 절편이라고 한다.

- 직선은 두 점을 이은 선으로 결정한다. 즉, $(2, 5)$, $(10, 3)$ 과 같은 두 점이 있으면, 그래프가 두 점을 모두 통과하는 고유한 선형함수가 있다. 이 경우 x 값이 2에서 10으로 8만큼 변화함에 따라, y 값은 5에서 3으로 변화하며 변화량은 -2 이다. 이때 $\Delta y = -2$, $\Delta x = 8$ 라고 쓴다. 변화하는 비율은 $-2/8 = -1/4$ 이고 이것이 기울기이다. y 절편은 $5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$ 이다.

- 따라서 그래프의 방정식은

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{2}$$

이다. 일반적으로 기울기가 m 인 직선이 (x_0, y_0) 을 지나가면, 변화율이 일정하므로, 직선의 모든 점 (x, y) 는 방정식

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)}$$

을 만족하며, 직선 방정식의 “모든 점에서의 기울기”이다. : 양 변에 $(x - x_0)$ 를 곱하면

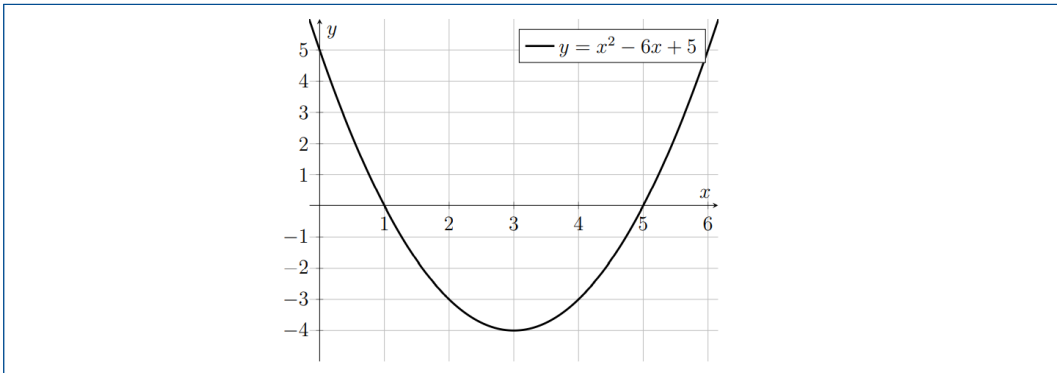
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

이다.

4) 이차함수

- 선형함수는 x 항만 포함하고 있으나, 이차함수는 다음 단계로 x^2 를 가지고 있다. x^2 의 그래프는 포물선이다. $-x^2$ 의 그래프는 y 값의 부호가 반대로 바뀌므로 아래쪽으로 오목한 그릇 모양이다. $2x^2$ 의 그래프는 모든 y 값이 두 배이어서 더 깊은 그릇 모양이고, $(1/2)x^2$ 는 더 얇은 그릇이다. $(1/2)x^2 + 3$ 은 모든 y 값이 $+3$ 만큼 더 크니까 얇은 그릇이 전체적으로 3 만큼 위로 올라간다. $ax^2 + b$ 형태에서, a 의 부호는 포물선이 가리키는 방향을 나타내며, a 의 크기(절댓값)는 얼마나 가파른지 제어하며, b 는 위 또는 아래로 이동하는 값이다. 2차 함수의 모든 그래프는 포물선이다(2차 함수가 아닌 경우 그릇 모양의 그래프가 있을 수 있지만, 포물선은 아니다). 핵심은 그릇을 놓을 위치와 가파른 정도를 파악하는 것이다.

- $y = (x-1)^2$ 의 그래프는 $y = x^2$ 의 그래프를 오른쪽으로 한 칸 이동하면 $y = (x-1)^2$ 의 그래프가 된다.
- 함수 $(x-3)^2 - 4$ 의 그래프를 그려보자. x^2 의 포물선 그래프 (그림 A3 참조)를 가져와서, 오른쪽 3칸 이동한 다음, 4만큼 아래로 이동한다. 따라서 $x = 3$ 일 때, 최저/최솟값이 -4 이다. 이 그래프가 두 점에서 x 축과 만나는 것은 분명하다. y 값이 0인 경우는 $(x-3)^2 = 4$ 일 때이다. 따라서 $(x-3) = \pm 2$ 이 되고, x 는 1, 5이다.



- $y = x^2 + 10x - 7$ 의 그래프는, $x^2 + 10x - 7 = (x+5)^2 - 32$ 이므로, 표준 포물선(x^2 의 그래프)을 왼쪽으로 5단위, 아래로 32단위로 이동한 것이다.
- $y = 3x^2 + 2x + 6$ 의 그래프는, 먼저 모든 것을 3으로 나누고, $x^2 + \frac{2}{3}x + 2$ 를 위와 같은 과정을 거치면 그릴 수 있다. 즉, $y = 3(x + 1/3)^2 + 17/3$ 이다. 그래프는 제곱 항의 계수가 3이므로 (표준 포물선보다) 더 가파르다: 그리고 왼쪽으로 1/3만큼 이동한 다음, 위로 17/3 단위만큼 이동한다. 이 전체 과정을 완전제곱 꼴로 만든다고 한다. 이 형태는 2차 함수를 그래프로 표시하고, 최소 또는 최대를 찾는 데 유용하다.

5) 지수함수

- 대부분 수량이 일정한 시간 동안 일정한 비율(또는 %)만큼 증가하거나 감소한다. 이 경우 지수 함수로 모형화된다. 인구는 기하급수적으로 증가하는데, 10년 동안 두 배로 증가하면 다음 10년 동안 다시 두 배가 되는 식이다. 이는 20년 만에 4배가 된다는 것을 의미한다. 30년 후에는 두 배의 두 배의 두 배가 되므로 8배가 된다. (6이 아님!)
- 5년 후에는 어떨까? 100명의 인가로 시작하여 5년마다 x 라는 비율로 증가하면 5년 후에는 $100x$ 가 되고 다시 5년이 더 지나면 $(100x)x = 100x^2$ 이 된다. 그런데 10년 후에 인구가 두

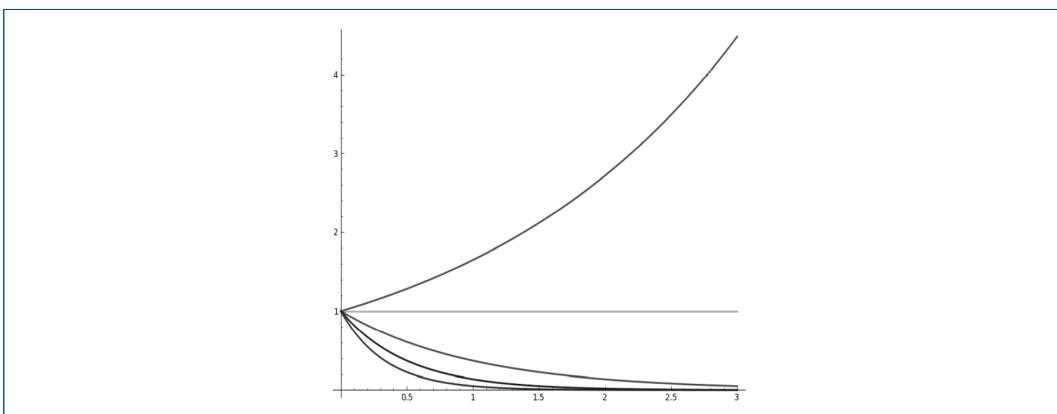
- 배가 되는 것이 틀림없음을 알고 있다고 하자. 그러면 $100x^2 = 100 \times 2$ 이고 100을 없애면 $x^2 = 2$ 이이고, $x = \sqrt{2} \approx 1.41$ 이다. 따라서 5년간의 인구 증가율은 1.41(약 41%씩 증가)이다.
- 이제 5 또는 10년이 아닌 임의의 시간 t 를 생각한다면 어떨까? a 라는 “인구”에서 시작하여 매 단위시간에 인구가 2배가 되는 지수 과정을 생각하자. 위의 예에서 단위시간은 10년이다. 시간 t 에 따른 인구수 $P(t)$ 에 대한 함수식을 만들자. “시작”은 $t = 0$ 라고 할 수 있다. 인구수는 시간단위 0에서 a 로 시작한다. 시간단위 1에서 $2 \times a$ 가 되고, 시간단위 2에서 $2 \times 2a$, 시간단위 3에서 $2 \times 2 \times 2a$, 그리고 시간단위 t 에서는 $P(t) = a2^t$ 이 된다. 앞에서 예로 들었던 10년마다 인구가 2배로 늘어나는 경우를 생각해보자. $t = \frac{1}{2}$ 라고 하면, $P(\frac{1}{2}) = a2^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{2}$ 이고, 인구가 2배가 되는 기간의 절반에는 인구증가 비율이 $\sqrt{2} \approx 1.41$ 이다. 앞의 예에서 인구는 10년마다 2배가 되고 5년 동안은 1.41배 증가하였다. 2배를 10번 하면 $2^{10} = 1024$ 배이다.
 - 이제 인구증가 비율이 2가 아닌 b 인 경우 함수는 다음과 같다.

$$P(t) = ab^t$$

- 모든 지수함수는 이 형식이지만 항상 그렇게 표시되는 것은 아니다. 그 이유는 지수와 로그의 경우 사람들이 2나 b 와 같은 밑을 사용하려 하지 않기 때문이다. 실생활에서 두 개의 특정 밑이 승리한 것 같다: e 와 10이다. 로그의 법칙을 사용하면 b^t 를 e 를 사용하여 t 에 관한 함수로 바꿀 수 있다. 그러면 어떻게 하면 될까? 자, b 는 e 의 적당한 거듭제곱이다. 따라서 $b = e^k$ 인 적당한 수 k 가 있으며, $b^t = (e^k)^t = e^{kt}$ 이다. 따라서 모든 지수함수는

$$P(t) = ae^{kt}$$

형태이다.



[그림 9] 다양한 값에 따른 지수함수 $f(x) = e^{ax}$ 의 그래프

$a = 1/2$ (위부분, 증가), $a = 0$ (평평), $a = -1$, $a = -2$, $a = -3$ (아랫부분, 가장 빠르게 감소). $a = -3$ 인 경우 아랫부분 그래프의 “너비”는 대략 $1/3$ 또는 $1/|a|$ 이다. a 가 음수이면 $1/|a|$ 는 너비의 신뢰할 수 있는 척도이고 감소를 $|a|$ 은 그래프가 얼마나 빨리 감소하는지를 나타낸다.

(6) 그래프에 대한 역함수, 로그 등

- 어떤 양수를 제공하면 9가 될까? 답 (3)을 얻으려면 제공 과정을 역으로 실행해야 한다. 제곱 (square-it) 함수를 사용하지만, 원하는 출력 (9)에서 시작하여 입력 (3)을 찾아낸다. 수학적 게임이며! 매우 유용하다. 함수의 출력이 주어지면 입력을 생성하는 프로세스를 역함수라고 한다. (경고 : 역함수는 함수의 역수가 아니다.)
- 인구수는 공식 $P(t) = 50 \times 2^t$ 로 설명된다. 언제 1,000에 도달할까? 이것은 P 기계를 거꾸로 실행하고 t 의 어떤 값이 1,000을 산출하는지 알아내는 것이기 때문에 역함수 문제이다. 즉, t 에 대해 $P(t) = 1,000$ 이므로, $50 \times 2^t = 1000$ 또는 $2^t = 20$ 이다. 이제 t 는 얼마인가? 2를 밑으로 하는 지수의 역함수가 필요하다. 즉, 밑이 2인 로그함수이다. 양쪽에 \log_2 를 취하면 $t = \log_2(20) = \log(20)/\log(2) = 4.32$ 가 된다.
- 밑을 10으로 하는 지수함수의 역함수는 로그함수이다. 이는 $\log y$ 가 그것을 지수화할 때 y 를 산출하는 숫자라는 의미이다. 즉, $10^{\log y} = y$. 일반적으로 f 가 함수를 표시하면 역함수는 f^{-1} 으로 표시한다. 경고: 이것은 $1/f$ 과 같지 않다! 지수와 로그는 $f(f^{-1}(y)) = y$ 이고 $f^{-1}(f(x)) = x$ 이다.
- 지수함수로 돌아가서, x 가 커짐에 따라 10^x 는 매우 빠르게 증가하므로 역함수 $\log(y)$ 는 y 가 커짐에 따라 매우 느리게 증가한다. 실제로 $\log(1,000) = 3$ 이지만 $\log(1,000,000)$ 은 겨우 6이다. 따라서 로그 함수는 방대한 양의 입력을 설명하는 데 매우 유용하다. 지진 강도 (리히터 척도), 소리의 세기(데시벨), 진화적 변화(시간에 따라 플롯 됨), 동물 종의 무게(길로 그램)는 로그로 측정되거나 로그 척도로 플롯된다. 입력의 작은 변화에 대해 출력 변화가 너무 작을 수 있기 때문에 로그 함수의 그래프는 자주 "로그 스케일"로 표시하기도 한다.

6

확률

- 동전을 던지면 앞면이 나올 확률이 50%라고 생각할 것이다. P 를 확률, H 를 앞면이라고 할 때, 앞면이 나올 확률은 $P(H) = 1/2$ 라고 표시할 수 있다. 정상적인 동전이라면 앞면이 나올 확률이 맞겠지만, 10번 던지고 앞면이 나온 횟수를 세어보라.
- 여러분이 앞면 5개라는 결과를 얻지 못했다고 확신한다. 틀렸을 수도 있지만, 저자가 옳을 가능성이 있다! 왜 그런가?
- 먼저 앞면 확률이 1/2, 일명 0.5 또는 50%라고 생각한 이유를 살펴보자. 두 가지 가능한 결과가 있으며 그 가운데 하나가 앞면이다. 둘 중 하나는 1/2이다. 물론 길을 건널 때도 두

가지 결과가 있을 수 있다. 차에 차이거나 차이지 않는 것. 그러나 확률은 1/2이 아니다. 그렇지 않으면 지금까지 살아 있을 수가 없다. 요점은 동전 던지기에서 두 결과가 똑같이 가능하다는 것이다.

- 주사위를 굴려서 “3이 나올 가능성은 얼마인가?”라고 묻는다면, 6가지의 똑같이 가능한 결과 중 하나이므로 가능성은 6분의 1 또는 1/6이고: $P(3) = 1/6$ 이라고 쓸 수 있다. 제공인 수가 나올 가능성은, 똑같이 가능한 6개의 결과 중 정확히 2개($1^2 = 1, 2^2 = 4$)이므로, 가능성은 6분의 2 또는 1/3이다. 제공수가 나오느냐 아니냐는 둘 중 하나가 아니다.
- 요약: 모든 결과가 똑같이 가능성이 있는 경우 어떤 이벤트의 확률은, 이벤트가 발생하는 결과 수(예 : 제공수 나오기처럼)를 총 결과 수로 나눈 값이다.
- 하지만 앞면이 나올 확률이 2분의 1이라면, 왜 저자가 10번의 던지기 중 5번의 앞면이 나오는 것에 내기를 걸었을까? 규칙에 따라 10번의 던지기에서 일어날 수 있는 모든 가능성을 기록해야 한다. 어렵게 들리니 두 번 던지기로 시작하겠다. (한 번 던지기는 고려하지 않는다. 앞면이 절반일 수는 없기 때문이다.) 두 번 던지기는, HH, HT, TH 또는 TT가 가능하다. 이 네 가지 똑같이 가능한 결과 중 정확히 두 경우가 앞면이 하나이므로, 두 번 던지기에서 앞면이 한 번 확률은 2/4 또는 1/2이다. 이것은 보장이 아니라 기회가 50-50이라는 의미이다. 네 번 던지기의 모든 가능성은 다음과 같다.

HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT
 THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT

- 16가지 가능성 가운데 여섯 경우(밑줄)가 (즉 3/8이) 정확히 두 번 앞면이 나오므로, 4번 던지기에서 절반이 앞면일 가능성은 1/2이 아니다. 모든 가능성 가운데, 절반이 앞면일 가능성은 가장 높지만, 1/2 미만이다. 10번 연속 던지기에서는 $2^{10} = 1024$ 가지의 결과가 있다. 그중 252개는 앞면이 정확히 5개이고, 총 던지기의 24.6%에 해당한다.
- 그렇다면 확률이 50%라는 것은 무엇을 의미하는가? "동전을 10억 번 던진다면, 그중 절반은 ..."이라는 것처럼 들렸을 것이다. 그러나 이미 4번 던지기에서, 절반이 앞면일 가능성은 1/2가 아니라는 것을 보았다! 더 잘 이해하려면, 동전 던지기에서 앞면이 나올 수 있는 횟수의 모든 가능성을 고려해야 한다. 이러한 가능성은 0과 1 사이의 분수로 나타난다. 그렇게 해야 동전을 무수히 던질 때 어떤 일이 일어나는지 볼 수 있다. 절반의 확률이란, 1/2을 제외한 다른 모든 분수의 가능성이 0으로 향한다는 것을 의미한다.

1) 기댓값

- \$20을 획득할 가능성이 1/100인 게임에 \$10을 베팅하겠는가? 사람들 대부분은 그러지 않는다. 100번 베팅했다고 가정해 보자. 그 가운데 한 번 이겨서 \$10(\$20의 상금에서 \$10의 지출을 뺀 금액)을 벌고, 99번은 \$10을 잃고 순 적자에 빠질 것이다. 실제로 예상 상금에서 손실을 뺀 금액을 $10 - 990 = -980$ 달러로 계산할 수 있다. 이것은 100번의 베팅을 기준으로 한 것이다. 따라서 한 번 베팅에 대해 \$9.80의 손실을 "예상"한다고 말할 수 있다. 계산을 살펴보면 예상되는 이익은

$$\frac{1}{100} \times 10 + \frac{99}{100} \times (-10) = -9.80$$

달러이다. 음수는 잃었음을 의미한다. 승리 또는 패배 두 가지 가능성이 있는데, 각각의 확률과 해당 결과에서 예상되는 이득 (또는 손실)을 곱했다.

기댓값은 모든 결과의 확률과 값을 곱한 합계이다.

- **예제 1** 이웃이 추첨 티켓을 판매하고 있다. 1장에 \$5로 티켓 100장이 판매되었다. 1등은 \$50, 2등은 \$25로 2명, 3등은 \$10으로 3명이다. 예상되는 이익 또는 손실은 얼마인가? 답을 얻으려면, 각 결과의 가치와 확률이 필요하다. 1/100의 확률로 \$45, 2/100의 확률로 \$20, 3/100의 확률로 \$5를 얻는다. 하지만 94/100의 확률로 \$5를 잃는다. 평균 이득을 계산하면,

$$\frac{1}{100} \times \$45 + \frac{2}{100} \times \$20 + \frac{3}{100} \times \$5 + \frac{94}{100} \times (-\$5) = \frac{\$45 + \$40 + \$15 - \$470}{100} = -\$3.70$$

이다. 따라서 티켓을 사는 것은 \$3.70을 기부하는 것에 가깝다.

2) 조건부 확률 베이즈 정리

- **질문:** 제니아가 주사위를 굴렀다. 5가 나올 가능성은 얼마나 될까? 답: 1/6.
- **질문:** 울리아가 주사위를 굴려서 어떤 숫자가 나왔는데 3보다 크다. 그 숫자가 5일 확률은 얼마인가? 답: 1/3.
- 첫 번째 질문과 두 번째 질문 사이에 차이가 있는 것은 울리아의 결과에 대해 알고 있다는 점이다. 3보다 큰 수라고 했으므로 숫자의 범위가 한정되었다. 울리아가 주사위를 던져서 나올 5라는 숫자는 실제로 6가지 가운데 하나가 아닌 3가지 가능성 (4, 5, 6) 중 하나였다. 이 현상을 조건부 확률이라고 한다. B가 발생했다는 전제에서 A가 발생할 확률이며, $P(A | B)$ 로 표시한다.
- 3보다 큰 짝수가 나올 확률은 얼마일까? 이러한 숫자는 4와 6, 두 개이므로 확률은 $6/1 = 1/3$ 이다. 이것을 다른 방식으로 생각할 수 있다. 3보다 큰 수가 나왔다는 전제가 있

고, 그 상태에서 짝수가 나왔다. 이제 이 두 가지 이벤트를 차례로 살펴보겠다. 3을 넘을 확률은 $3/6 = 1/2$ 이다. 그리고 3을 넘었을 때 짝수가 나올 확률은 얼마일까? 답은 $2/3$ 이다. 두 가지를 모두 일어날 확률은 $(1/2)(2/3) = 1/3$ 이다. 어쩌서 그런지 보자. 3을 넘는 던지기 이벤트를 " > 3 "이라고 쓰고, "그리고"를 \wedge 로 쓰면

$$P(> 3 \wedge \text{짝수}) = \frac{\#\{> 3 \wedge \text{짝수}\}}{\#\text{전체}} = \frac{\#\{> 3\}}{\#\text{전체}} \cdot \frac{\#\{> 3 \wedge \text{짝수}\}}{\#\{> 3\}}$$

이다. 일반적인 조건부 확률은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(A \wedge B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

즉, $P(A|B) = P(A \wedge B)/P(B)$ 이다.

- 이 공식은 유용한 방법으로 전환할 수 있다. "A와 B"는 "B와 A"와 같은 의미이므로, $P(A \wedge B) = P(B \wedge A)$ 임을 알 수 있다. 이 간단한 사실을 앞의 공식에 적용하고 A와 B의 역할을 바꾸어 수행하면

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

이고 $[P(A|B) = P(A \wedge B)/P(B), P(B|A) = P(B \wedge A)/P(A)]$, 양변을 $P(B)$ 로 나누면 베이즈(Bayes)의 정리가 된다.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

$P(A|B)$ 를 찾는 것은 어렵지만 $P(B|A)$ 를 찾는 것이 쉬운 경우 유용한 공식이다.

7 통계

1) 평균, 표준 또는 평균

- 연평균 수입이 백만 달러인 마을에 관한 이야기를 들었다. 거기서 이사를 해야 할까? 자세히 살펴보면 1,001명의 노동인구 가운데 연간 \$25,000의 소득을 가진 사람이 1,000명이고, \$976,000,000의 소득을 가진 1명의 부자 거물이 있는 것으로 밝혀졌다. 이 소득 분포의 평균 또는 산술평균은 소득 합계를 사람 수로 나눈 값이다. \$25,000에 천을 곱하고 \$976,000,000을 더한 다음, 인구수인 1,001로 나누면 $(\$25,000,000 + \$976,000,000)/1,001 = \$1,000,000$, 즉 백만 달러가 된다.
- 평균 소득이 백만 달러라는 기술적으로는 사실이지만, 일반적으로 영어 단어 "평균"은 "통상적인 경험"과 관련이 있다고 생각하기 때문에, 숫자는 오해의 소지가 있다. 통상적인 경험이 평균과 같지 않다는 것이 아주 분명하며, 실제로 사람들 대부분은 어려움을 겪고 있을 것이다. 이 정도의 소득은 2017년에 4인 가족 기준으로 빈곤선에 놓여 있다는 뜻이다.

- 교훈은 평균이 숫자 분포의 하나의 척도일 뿐이라는 것이다. x 로 표시된 값의 분포가 주어지면 \bar{x} 또는 $\langle x \rangle$ 로 표시되는 평균은 글자 그대로 평균이다. 즉, 모든 x 값의 합계를 전체로 나눈 값이다.

2) 중앙값

- 평균의 문제를 회피하는 한 가지 방법은 데이터 집합의 중앙값을 사용하는 것이다. 중앙값은 데이터 집합의 "가운데"에 있는 숫자이다. 즉, 분포의 절반은 중앙값보다 높고 절반은 낮다. 예를 들어 데이터 집합 {1, 7, 3, 6, 2}을 1, 2, 3, 6, 7 순서로 정렬하면 3이 중앙값이다. 데이터가 {5, 8, 6, 0}이면 단일 숫자가 없으며, 중앙값을 중간에 있는 두 숫자 (5와 6)의 평균인 5.5로 정의한다. (현실적인 데이터 집합에서는 중앙값에 근접한 숫자가 많으므로 "중간"을 계산하는 방법은 그다지 중요하지 않다). 데이터 집합 {8, 5, 7, 9, 7, 7, 1}, 중앙값은 7이다.
- 대부분 사람이 적은 월급을 받고 있어서 빈약한 생활을 하는 마을에서, 1명의 거액 자산가로 인해 평균 월급은 높을 수 있지만, 중앙값은 더 낮고 통상적인 소득의 형태를 더 정확하게 보여준다.

3) 분산, 표준 편차

- 학급에 학생이 두 명뿐이라고 가정하자. 첫 번째 테스트에서는 둘 다 80점, 두 번째 테스트에서는 60점, 다른 하나는 100점이다. 두 경우 모두 평균은 80점이지만 두 번째 테스트에서는 성적 분포가 평균 또는 표준에서 상당한 편차를 보인다. 분포의 "흩어진 정도"를 정량적으로 나타낸 값을 표준 편차라고 한다.
- 표준 편차는 평균으로부터 떨어져 있는 정도를 계산하여야 하는데, 모든 수량에서 평균을 빼서 기준값을 0으로 설정하는 것이 편리하다. 위의 테스트 예에서는, 두 분포의 모든 값에서 80을 빼면 (80의 평균에서 측정한) 점수의 분포는 다음과 같다. 하나는 0과 0이고 다른 하나는 -20이고 20이다. 첫 번째 경우에는 분산된 정도가 0이고 두 번째 경우에는 20이라고 말할 수 있다. 따라서 표준 편차에 대한 합리적인 정의는 분산된 정도를 나타내야 한다.
- x 가 숫자이면 0으로부터의 거리는 $|x|$ 이므로 x 가 +3 또는 -3이면, 두 경우 모두 $|x| = 3$ 이다. 이제 $|x| = \sqrt{x^2}$ 인 것에 유의하자. x 라고 부르는 평균에서 벗어난 정도를 나타내는, 표준 편차를 $|x|$ 의 평균값으로 취하는 것이 자연스러워 보일 수 있다.
- 그러나 실제로는 x^2 의 평균값을 계산한 다음 다시 제곱근을 취한다. 이렇게 하면 계산하기 더 간단하며 이것이 분산된 정도를 잘 나타낸다. 앞의 첫 번째 예에서, 0^2 과 0^2 의 평균은 0이고

- 다시 제곱근을 취하면 0이다. 두 번째 예에서 20^2 과 $(-20)^2$ 의 평균은 400이고 표준편차는 $\sqrt{400} = 20$ 이다. 한편 x^2 의 평균을 분산이라고 부른다. 표준 편차는 분산의 제곱근이다.
- 데이터 집합 (5, 2, 4, 6, 4, 4, 3)에서 평균은 $x = 4$ 이다. 따라서 평균과의 차이는 각각 {1, -2, 0, 2, 0, 0, -1}이다. 이 값들의 제곱은 $\{1^2, (-2)^2, 0^2, 2^2, 0^2, 0^2, (-1)^2\}$ 이고, 이들의 합의 평균인 분산은 $10/7$ 이며, 표준편차는 $\sqrt{10/7} \approx 1.195$ 이다.

x 로 표시된 값의 분포가 주어지면 분산은 $(x - \bar{x})^2$ 의 평균이다. 표준 편차는 분산의 제곱근이며 분포의 흩어진 정도를 나타낸다. 표준 편차는 σ 로 표시하며, $\sigma = \sqrt{\langle (x - \bar{x})^2 \rangle}$ 이다.

4) 확률 분포 vs 통계 분포

- 게임에서의 상금, 시험 점수와 데이터 집합을 생각하자. 게임 상금은 고유의 확률을 가지고 있으나, 시험 점수는 확률과 관계없다. 각각의 데이터에 확률이 있는 집합을 확률 분포라고 하며, 확률이 없는 단순한 데이터 분포를 통계 분포라고 한다. 확률 분포에서는 확률에 따른 기중평균을 취하면 기댓값을 계산할 수 있다. 통계 분포에서는 단순 평균을 취하여도 특정한 값이 다른 값보다 더 많이 발생하면 (확률 분포와) 비슷한 효과가 나타난다. 실제로 확률 분포와 통계 분포에 대해 같은 수치(평균, 분산, 표준 편차)를 계산할 수 있다.
- 주사위 굴리기를 생각하자. 나올 수 있는 값은 {1, 2, 3, 4, 5, 6}이며, 6개 값의 확률은 모두 $1/6$ 이다. 이 확률 분포의 기댓값(또는 평균)은 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 3.5$ 이다. 분포의 분산은(평균에서 빼야 함)

$$\frac{1}{6}((1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (5-3.5)^2 + (6-3.5)^2) = \frac{35}{12} \approx 2.9$$

이고, 표준 편차는 $\sqrt{35/12} \approx 1.7$ 이다. 하지만 실제로 주사위를 6번 던지면, {1, 2, 3, 3, 4, 5}와 같은 데이터 집합을 얻을 수 있으며, 이는 통계 분포이다. 평균값은

$$\frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5) = 3 \text{이고, 이 통계 분포의 분산은}$$

$$\frac{1}{6}((1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2) = \frac{10}{6} \approx 1.7$$

- 이다. 그리고 표준 편차는 $\sqrt{10/6} \approx 1.3$ 이다. 통계 분포인 데이터 집합을 보면, 데이터가 확률 평균 3.5 근처보다 통계 평균 3 근처에 더 모여 있으며, 표준 편차가 더 작은 것이 타당하다.
- 실제로 450명에게 급여에 대해 설문조사를 하고 막대그래프에 결과를 표시할 수 있다. 이 데이터 집합에서 평균 급여와 표준 편차를 도출할 수 있다. 두 값은 그래프가 어떻게 생겼는지에 대한 느낌을 줄 수 있지만 실제 데이터를 대신할 수는 없다.

5) 정규 분포: 중심극한정리

- 모노폴리 게임은 주사위 2개를 굴려서 합으로 겨룬다. 합의 범위는 2에서 12 사이이며(명확히 하기 위해 여기에 밑줄로 표시함) 다음과 같은 확률로 발생한다.

$$\left\{ \underline{2}: \frac{1}{36}, \underline{3}: \frac{2}{36}, \underline{4}: \frac{3}{36}, \underline{5}: \frac{4}{36}, \underline{6}: \frac{5}{36}, \underline{7}: \frac{6}{36}, \underline{8}: \frac{5}{36}, \underline{9}: \frac{4}{36}, \underline{10}: \frac{3}{36}, \underline{11}: \frac{2}{36}, \underline{12}: \frac{1}{36} \right\}$$

이 확률 분포의 평균은, 주사위 합에 확률을 곱한 값을 모두 더한 것이다. 즉,

$$\frac{2 \cdot 1}{36} + \frac{3 \cdot 2}{36} + \frac{4 \cdot 3}{36} + \frac{5 \cdot 4}{36} + \frac{6 \cdot 5}{36} + \frac{7 \cdot 6}{36} + \frac{8 \cdot 5}{36} + \frac{9 \cdot 4}{36} + \frac{10 \cdot 3}{36} + \frac{11 \cdot 2}{36} + \frac{12 \cdot 1}{36} = 7$$

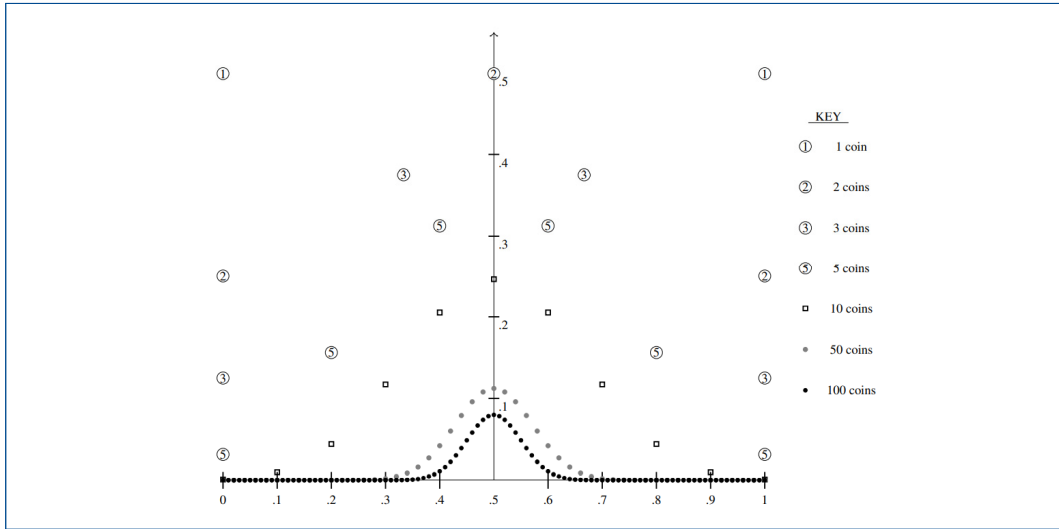
이다.

- 이것은 일반적인 특징이다: 합(여기서는 두 주사위의 합)의 평균은 평균의 합이다. 위의 경우 $3.5 + 3.5 = 7$ 이다.
- 분산을 계산해보자. 먼저 각 값에서 7(평균)을 뺀 다음 결과를 제공한다. 여기에 확률을 곱하면 첫 번째 항은 $(2-7)^2 \times \frac{1}{36}$ 이고 다음 항은 $(3-7)^2 \times \frac{2}{36}$, ... 이다. 따라서 모든 합은 $\frac{1}{36}(25 + 32 + 27 + 16 + 5 + 0 + 5 + 16 + 27 + 32 + 25) = \frac{210}{36} = \frac{70}{12}$ 이다. 두 주사위 눈금의 합 $x_1 + x_2$ 의 분산이, 각 눈금 x 의 분산의 2배임을 알 수 있다. 이것은 평균처럼 직관적이지는 않지만, (두 눈금이 서로 독립적이라면) 또 다른 일반적인 특징이다.
- 한 눈금을 두 눈금의 합과 비교하기는 어렵지만 한 눈금을 두 눈금의 평균과 비교할 수는 있다. 이 경우 평균은 같다(모든 수를 2로 나누고 평균을 구하면, 7은 $7/2 = 3.5$ 가 된다). 분산과 표준 편차를 비교하면 어떨까? 한 번 던지기의 분산은 $35/12$ 였다. 두 번 던지기의 평균의 분산은, 합계의 분산과 유사하지만, 모든 숫자를 2로 나눈 다음 제공하므로 실제로 $1/4$ 을 곱하게 되어 $35/24$ 가 된다. 즉, 한 번 던지기의 절반이다. 따라서 (분산의 제곱근인) 표준 편차는 $1/\sqrt{2}$ 배로 감소한다.
- 주사위를 세 번 던지면, 분산은 $1/3$ 배 줄고, 표준편차는 $1/\sqrt{3}$ 배 감소한다.
- 마찬가지로 N 번 던지기를 하면 표준 편차가 매우 작아진다. 이는 주사위를 더 많이 던질수록 더 높은 확률로 평균이 3.5 주위에 집중된다는 것을 의미한다. 따라서 1,000개의 주사위를 굴리고 평균값을 취하면 3이 아닐 것이다 - 8.4의 6번 던지기 예에서는 특별하게 평균이 3이었지만.

- 이 축소를 더 잘 설명하기 위해 양면 주사위의 "굴림"으로 생각할 수 있는 동전 던지기에 초점을 맞춰 보겠다. 뒷면은 0이고 앞면은 1이라고 하자. 확률은 $\{0: \frac{1}{2}, 1: \frac{1}{2}\}$ 이다. $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ 이므로 평균은 $\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 분산은 $\frac{1}{2}(0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ 이고, 표준편차는 $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ 이다.
- 두 개씩 던지기를 해서 합계로 평균을 구할 수도 있지만, 앞에서 보았던 한 개씩 던지기과 비교하기 위해, 두 눈금의 평균값으로 평균을 구하는 것이 더 효과적이다. 뒷면이 0이고 앞면이 1인 동전을 무더기로 던지면, 평균은 (전체 동전 수 대비) 앞면이 나온 동전 수의 비율과 같다. 눈금의 평균이 1/2을 중심으로 분포한다고 예상할 수 있다.
- 동전 두 번 던지기로 돌아가서, 두 번 굴린 결과의 평균을 계산하면 확률은 $0: \frac{1}{4}$ (뒷면, 뒷면), $\frac{1}{2}: \frac{1}{2}$ (앞면과 뒷면), $1: \frac{1}{4}$ (앞면, 앞면)이다. 평균은 다시 $\frac{1}{2}$ 이고 분산은 $\frac{1}{4} \cdot (0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \cdot (0)^2 + \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{8}$ 이고, 예상한 대로 1/4에서 1/8로, 절반이 감소했다. 표준 편차는 $1/\sqrt{2}$ 만큼 감소했다. 다음 <그림 10>은 다양한 개수의 동전 던지기의 평균에 관한 분포를 나타낸다.
- 100개의 동전(검은 점)을 던졌을 때 평균값이 1/2 부근에 더 밀집되는 것을 그래프에서 알 수 있다. 검은 점의 표준 편차가 1/2에서 1/20로, $1/\sqrt{100} = 1/10$ 만큼 축소되었기 때문이다.

(A4) 평균이 \bar{x} 이고 표준 편차가 σ 인 분포에서 N 개의 항을 독립적으로 선택하면, 이 집단의 평균은 \bar{x} 이고 표준편차는 σ/\sqrt{N} 인 분포를 가진다.

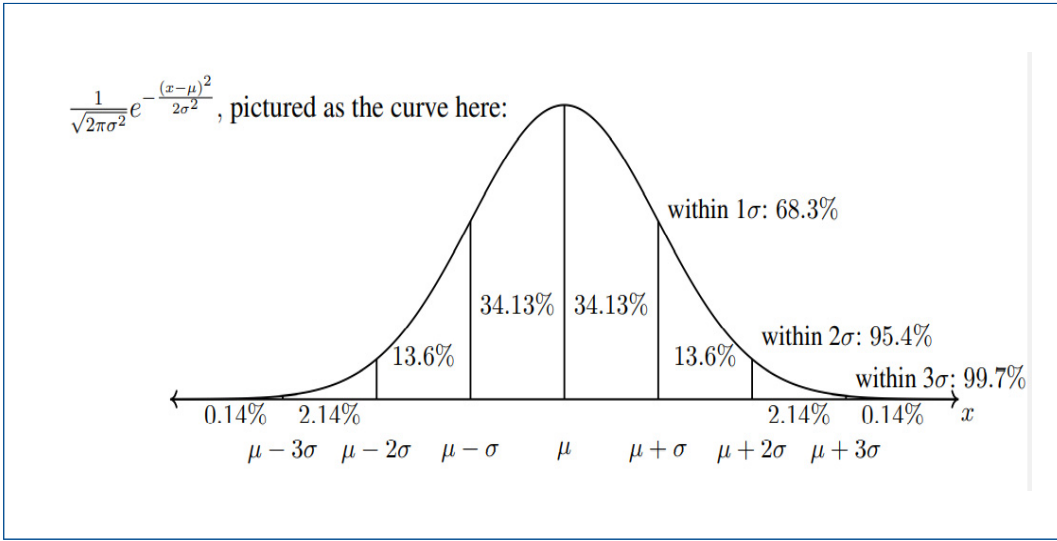
- **비고 1** 그래프에서 동전의 개수와 관계없이 값(높이)은 확률을 나타내므로, 모두 합하면 1이어야 한다. 더 많은 동전 무더기를 던지면 더 많은 종류의 평균값이 가능하다는 점을 생각하면, 동전 수가 많을수록 그래프의 전체 크기가 작아지는 이유를 알 수 있다. 그러나 불룩한 꼭대기 근처를 보면, 검은 점 하나하나의 낮은 값을 가지고 있지만, 더 많은 점이 분포한다. 그래서 일정한 범위 안에서 어떤 결과를 찾을 확률은 (범위를 어떻게 정하는가에 따라) 감소할 수도 있고, 감소하지 않을 수도 있다. 동전 100만 개를 던졌다고 하면, 그래프는 거의 x 축에 붙어 있는데(실제로 보이지 않음), 이는 정확하게 앞면이 절반이고 뒷면이 절반일 확률은 실제로 극히 희박하다는 것을 의미한다. 그런데도 봉우리가 점점 뾰족해지는 것은, 앞면이 나오는 동전의 비율이 1/2에 매우 가깝다는 의미이다. 이것이 "확률 1/2"의 진정한 의미이다.



[그림 10] 1, 2, 3, 5, 10, 50, 100개 동전 던지기 평균의 확률

뒷면은 0이고 앞면은 1이므로, x 축은 앞면을 나타내는 동전의 비율이다.

- 분포의 평균이 0이고 표준 편차가 1일 때 정규 분포라고 하고, 함수 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ 로 표현된다. 이 함수의 그래프는 <그림 10>의 검은 점들이 나타내는 "종 모양 곡선"이다. 일반적으로 평균이 μ (\bar{x} 로 표시되기도 함)이고 표준 편차가 σ 인 경우, 모양은 같지만 \bar{x} 을 중심으로 하고 σ 단위로 하는 그래프가 그려진다. 그림 A10의 곡선은 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ 으로 표시된다.
- 이 확률 분포에서 (0보다 크고) x 보다 작은 확률은 "누적 분포 함수"인 $\Phi(x)$ 로 나타낸다. 개별적인 확률은, 동전 던지기와 같이 0을 향해 감소할 수 있지만, 0보다 크고 x 보다 작은 값이라는 범위에 해당할 확률은 $\Phi(x)$ 이다. <그림 11>을 보면 종 모양 곡선에서, 어떤 값이 평균에서 2개 이상의 표준 편차만큼 적을 확률은 0.14%+2.14%이다. 즉 $\Phi(-2) = 0.0014 + 0.0214 = 0.0228$ 이다. 그림에서 다른 값들도 알아낼 수 있다.
- 다시 동전 던지기 <그림 10>을 보면, 그래프가 작은 점들로 그려져 있지만, <그림 11>의 함수 그래프는 연속적인 곡선이다. 우리는 이미 점이 더 많아지면 하나의 특정 값을 측정할 가능성이 점점 줄어들어 따라 확률의 전체 높이가 낮아진다는 것을 보았다. (정확히 133,792개를 던졌을 133,792개의 앞면이 나올까? 그럴 것 같지 않다!)



[그림 11] 정규 분포 곡선

※ 정규 분포는 표준 편차가 σ 이고 평균 μ 를 중심으로 하는 친숙한 "종 모양 곡선"이다. x 값의 일부 범위에서 결과가 발생할 확률은 해당 값보다 큰 곡선의 비율과 같다. 예를 들어, 평균 위의 1개와 2개 표준 편차 사이의 곡선 비율은 13.6%이다. 또 다른 예로서, 평균($\mu - \sigma$ 와 $\mu + \sigma$ 사이)의 1- 표준편차 내에 들어갈 확률은 68.3%라는 것을 알 수 있다.

- 정규분포에서 특정한 값보다 작은 범위에 속할 확률은 미적분 방법으로 계산을 할 수 있다. 답은 $\Phi(x)$ 이다. x 가 음수이면서 절댓값이 매우 크면 x 보다 작은 확률은 무시할 수 있으므로 $\Phi(x)$ 는 0에 가깝다. x 가 양수이면서 아주 크면 거의 모든 값이 x 보다 작을 것이 거의 확실하므로 $\Phi(x)$ 는 1에 가깝다.
- 앞의 예에서 회색과 검은색 점들의 분포가 매끄러운 종 모양을 향하고 있는 것처럼 보인다. 던지기 횟수가 증가함에 따라 <그림 11>과 같은 모양의 정규 분포가 된다. 놀랍게도 이것은 더 일반적인 현상의 한 부분이다: 많은 횟수의 시행을 거쳐서 어떠한 변수(예: 동전 던지기 또는 주사위 값)라도 평균화하면 분포는 정규(분포)라고 하는 연속적인 종 모양의 곡선에서 평균값 주위에 집중된다. 이 분포는 전적으로 평균과 표준 편차에 의해 결정된다. 이것을 뒷받침하는 정리를 중심극한정리라고 한다. 단일 이벤트에 대한 평균 μ 와 표준 편차 σ 를 알고 있는 경우, N 개의 이벤트를 평균화하면, 놀랍게도 평균은 여전히 μ 이고 표준 편차는 σ/N 이 된다.
- 정규 분포에서 $\Phi(x)$ 값을 계산하려면 적분 문제를 손으로 풀어야 한다. 하지만 $\Phi(x)$ (누적분포함수)는 온라인이나 `normalcdf()` 함수를 사용하는 일부 계산기에서 찾을 수 있다.

6) p-값과 귀무가설

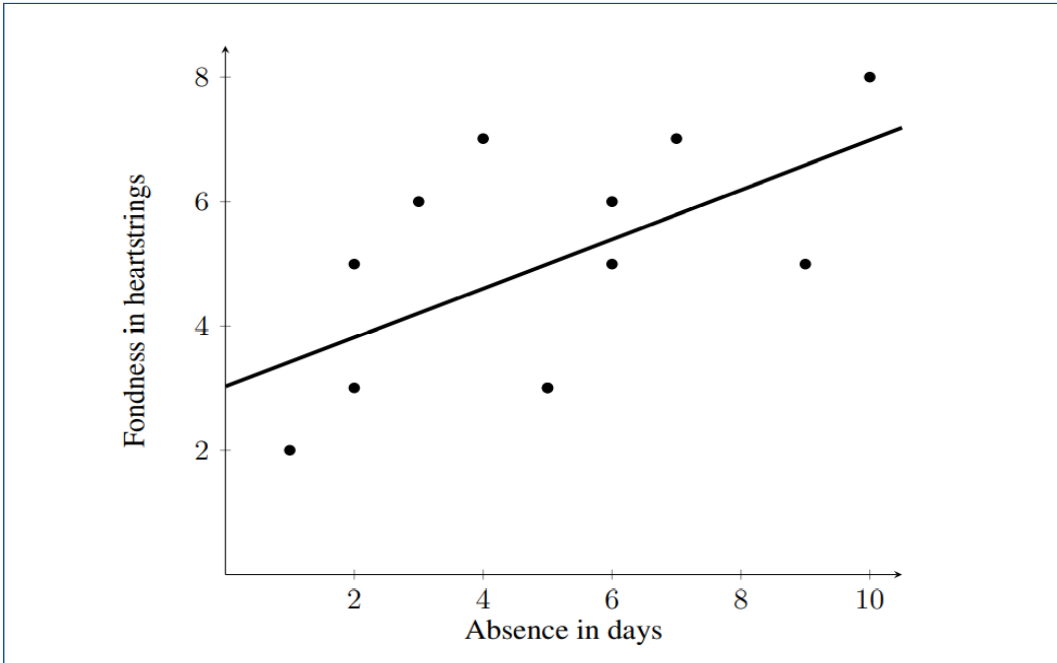
- 주사위를 여섯 번 던졌는데, 3이 두 번 나오고, 6은 한 번도 안 나오고, 나머지 숫자는 한 번씩 나왔다. 이 주사위가 공정한 것인지 아닌지 어떻게 하면 알 수 있을까? 아마도 3과 6쪽으로 무게가 쏠려 있을지도 모른다. 제조 오류가 있어서 6이 나와야 할 때 실제로 3이 나왔을 수 있다. 단지 6번 던져보고 주사위가 불공정하다고 결론을 내릴 수 있을까?
- 지금은 이 질문에 의미 있는 대답을 추출하기에 던진 횟수가 너무 적다는 직감이 있을 것이다. 그러나 더 많이 던진 후에도 이러한 불일치(평균값이 3.5가 아니고 3인)가 지속된다면, 공정할 가능성이 매우 낮다: 실제로 (많이 던질수록) 표준 편차가 줄어들고, 3은 종 모양 정규분포 곡선의 왼쪽에 나타난다. 주사위를 100번 굴렸는데 평균값이 3이라고 가정해 보자. 이 평균값 3이 정규분포 곡선의 중앙에서 어느 정도의 표준 편차만큼 치우쳐져 있는지 안다면, 불공정 주사위(단어가 맞아?)일 가능성을 결정할 수 있다. 한 번 동전 던지기의 표준 편차는 약 1.71임은 이미 확인했다. 따라서 100회의 동전 던지기에서 평균값의 표준 편차는 $1.71/100=0.17$ 이다. 100번 던지기에서 관측된 평균값(3)은 정규분포의 평균(3.5)에서 $0.5/0.17$ -표준편차 즉, 약 2.9-표준 편차(2.9σ 라고 함)만큼 떨어져 있다. 통계학에서 3σ 이상인 이벤트는 매우 희귀한 것으로 간주한다.
- **비고 A5** 정규 분포에 대한 몇 가지 법칙은 알아두면 유용하다. 측정값의 68%는 평균의 1-표준 편차 내에, 95%는 2-표준 편차 내에, 99.7%는 3-표준 편차 내에 속한다.
- 우리가 알고 싶은 것은, '주사위가 불공정하다는 결론을 내릴 수 있는가?' 이다. 통계학자들이 답을 계산하는 방식은, 주사위가 공정하다는 귀무가설을 설정하는 것이다. 이 가설을 검증하여, 결과가 왜곡되어 있을 확률이 아주 낮으면 주사위가 공정하다고 결론을 내릴 것이다.
- 그러면 어떻게 그 확률을 찾을 수 있을까? 관찰한 값이 평균에서 몇 σ 만큼 벗어나 있는지를 측정하고, 함수 Φ 를 사용하여 그만큼 벗어나 있을 확률을 계산한다. 지금은 $\Phi(-2.9) \approx 0.00187$ 로, 이 수치는 관찰값이 평균보다 2.9-표준 편차 이상 아래에 속해있을 확률을 말해준다. 평균보다 $2.9 - \sigma$ 이상 위에 속해있을 가능성도 마찬가지이다. 따라서 이 정도로 벗어날 확률은 (위, 아래 합해서) $0.00374(=0.374\%)$ 이다. 즉, 주사위가 공정하지 않다는 결론을 99.6% 확신을 두고 내릴 수 있다.
- 때로는 반대로 신뢰 수준을 먼저 설정하는 경우도 있다(예: 99%). 99%의 신뢰도를 가지는 x 값이 얼마인지 알려면 $\Phi(x) = 0.005$ 를 계산하면 된다. $x \approx -2.58$ 이며, 이는 평균에서 2.58-표준 편차 이상 위아래로 벗어나는 범위에 속하는 값이 나타날 확률이 0.01임을 의미한다. 2.58-표준편차는 $2.58 \times 0.17 \approx 0.44$ 이므로, 주사위를 100번 던졌는데 평균값이 3.06에서 3.94 사이(3.5 ± 0.44)를 벗어나 있다면, 불공정한 주사위이기 때문이라고 99% 확실하게 결론을 내릴 수 있다.

7) 상관관계 vs 인과관계

- 100명의 프로 테니스 선수에게 가지를 먹느냐고 물어보고, 둘 사이에 강한 상관관계를 발견했다고 가정해 보자. 가지를 먹으면 테니스가 향상된다는 결론을 내릴 수 있을까?
- 통계 초보자의 전형적인 실수이자 뉴스 보도의 빈번한 실수는 상관관계와 인과관계를 혼동하는 것이다. 이 예에서는 아마도 인과관계가 반대로 작용하고, 테니스를 많이 치면 가지에 대한 갈망이 생길 수 있다.
- 사실, 어떤 인과관계에 대해서도 결론을 내릴 수는 없다. 어쩌면 가지 재배자 협회가 특별 연말 보너스를 받기 위해, 회원들에게 가지 먹기 약속을 요구하는 프로 테니스 선수 협회와 계약을 맺었고, 이는 프로 테니스 선수들의 행동을 변화시켰을지도 모른다. 아니면 괴짜 기술 역만장자가 전국 모든 테니스 클럽에서 가지를 먹는 사람들에게 무료 회원권을 제공하고 평생 동안 라켓과 공을 공급하는 전국 프로그램에 자금을 지원했을 수도 있다.
- 상관관계는 인과관계가 아니다!

8) 회귀: 어쨌든 어떤 직선인가?

- '부재'와 '좋아함'과 같은 두 변수 사이에 선형관계가 있을 때, 실제 직선 방정식을 제안하려고 한다. 이것을 선형회귀라고 한다. 데이터 집합에 직선을 맞추는 가장 일반적인 방법은 최소제곱 맞춤을 수행하는 것이다. 즉, 선에서 점까지의 수직 거리의 평균 제곱이 가장 작아지는 직선을 결정한다. 예를 들어, 직선 $y = 5 + \frac{1}{2}x$ 는 점 (2,6)을 통과하므로 예 A4의 데이터 점 (2,3)은 수직 거리가 3(y 값의 양의 차이)이고 제곱은 9이다. 이 모든 값의 양을 평균화하면 어떤 숫자가 나온다. 직선 $y = mx + b$ 에서 m 과 b 의 값을 선택하여 그 어떤 수가 가능한 작게 하고 싶다.
- 결과는 m 과 b 의 2차 함수이기 때문에 최솟값을 찾는 것이 포물선에서 가장 낮은 점을 찾는 것과 다르지 않다는 것을 강조한다.



V

분야별, 수준별 양적추론 학습자료

1. 경제 및 사회 분야	93
2. 과학 및 응용 분야	100
3. 보건 및 환경 분야	118
4. 역사 및 문화 분야	127



... V. 분야별, 수준별 양적추론 학습자료

- 양적추론 학습자료는 분야별, 수준별로 제시하였다. 분야는 경제 및 사회, 과학 및 응용, 보건 및 환경, 그리고 역사 및 문화로 범주화하였고, 수준은 초급, 중급, 고급의 세 단계로 구분하였다.

1 경제 및 사회 분야

1) 중국 자산이 20년에 17배 증가했다면 매년 몇 %나 증가한 것일까?

- 기초수학: 복리, 로그, 성장률
- 수준: 중급
- 신문기사 활용

"중국 순자산 20년간 17배 급증...미국 넘어서"¹⁾

지난 20년 동안 순자산 기준으로 중국이 미국을 이미 넘어선 것으로 나타났다.

14일(현지시간) 블룸버그 통신에 따르면 컨설팅 회사 맥킨지앤컴퍼니는 전 세계 소득의 60% 이상을 차지하는 10개국의 대차대조표를 분석한 보고서에서 전 세계 순자산은 2000년 156조 달러(약 18경3천755조 원)에서 2020년 514조 달러(약 60경5천430조 원)로 약 358조 달러, 약 229% 늘어났다고 분석했다.

순자산이 가장 많은 국가는 중국이었다. 중국의 순자산은 중국이 세계무역기구(WTO)에 가입하기 전 해인 2000년 7조 달러(약 8천246조 원)에서 지난해 120조 달러(약 14경1천355조 원)로 17배 넘게 커졌다. 이 기간 전 세계 순자산 증가분의 약 3분의 1을 중국이 가져간 것이다.

미국은 90조 달러(약 10경6천16조 원)로 2위를 기록했다. 미국은 2008년 세계 금융위기로 부동산 거품이 꺼지는 등의 영향으로 같은 기간 순자산이 50조 달러, 125% 커지는 데 그쳤다.

맥킨지의 계산에 따르면 전 세계 순자산의 35%는 토지, 33%는 집 등 건물에 투자돼 있었다. 전체 순자산의 3분의 2 이상인 68%가 부동산인 셈이다. 나머지 32%는 인프라와 기계, 지적 재산권, 특허 등의 형태였다. 금융 자산은 누군가의 부채로 상쇄되기 때문에 이번 순자산 계산에는 빠졌다고 보고서는 밝혔다.

보고서에 따르면 지난 20년간 순자산 증가 속도는 세계 총생산(GDP) 증가 속도를 뛰어넘는다. 금리 하락의 영향으로 부동산 가격이 치솟은 덕분이다. 이 기간 자산 가격 상승폭은 장기 평균 소득 상승폭보다 거의 50% 높았다.

맥킨지 글로벌 연구소의 안 미슈케 파트너는 블룸버그와 인터뷰에서 "인플레이션을 뛰어넘는 자산 가격 상승은 많은 부작용을 불러일으킬 수 있다"고 말했다.

부동산 가격의 급등은 많은 사람이 주택을 소유하지 못하게 만든다. 또 부동산 거품이 꺼지면 2008년 글로벌 금융위기와 같은 경제 위기를 가져올 수 있다. 특히 중국은恒大·에버그란데) 그룹과 같은 부동산 개발업자들의 부채 문제로 금융위기에 부딪힐 수 있다.



보고서는 이런 문제를 해결하기 위한 가장 이상적인 방법은 전 세계 GDP를 확대할 수 있는 더 생산적인 곳을 찾아내 세계 자산을 부동산이 아닌 이곳에 투입, 전 세계 GDP를 순자산 수준으로 키우는 것이라고 제안했다. 최악의 시나리오는 자산 가격 붕괴로 전 세계 순자산의 3분의 1이 사라지면서 전 세계 소득 수준에 맞춰지는 것이라고 보고서는 설명했다.

(1) 개요

- 성장률의 통계적 해석을 통해 복리계산법을 이해한다. 복리계산법은 이자율이 저축액에 미치는 영향, 투자율에서 할인율의 의미 등을 이해하는데 중요하다.
 1. 경제현상은 우리의 직관과 일치하지 않는 경우가 많음을 사례로서 먼저 이해한다.
- 사례에서 20년간 17배 급증이라는 현상이 어떻게 가능할지를 질문해보고, 일상생활에서 유사한 현상을 같이 찾아본다.
 2. 초기의 미세한 차이가 장구한 세월 후에 매우 큰 차이를 낳는다는 점을 이해할 수 있다.
 3. 이자율의 차이가 투자의 미래 가치를 크게 변화시키는 것처럼, 동일한 이자율의 차이는 투자의 예상 수익을 현재 평가하는 현재 가치도 크게 변화시킬 수 있다는 점을 이해할 수 있다.

추동질문		매년 4%씩 성장하면 몇 년 만에 우리의 부는 2배가 될까?
단계	소주제	내용
1단계 질문 이해	고려해야 하는 것	<ul style="list-style-type: none"> • 기사를 읽어보고 직관적으로 이해 가능하고 설명 가능한지를 토론했다. • 현실에서 이와 유사한 사례를 찾아본다. <p>"지난 100여 년 간 미국의 1인당 실질 GDP는 연평균 2% 성장하였다. 이 추세로 계속 성장하면 35년 만에 평균 소득이 2배로 증가한다... 싱가포르, 한국, 대만 등 동아시아 국가들은 지난 몇십 년 동안 매년 약 7%씩 경제가 성장했다. 연평균 7%씩 성장하면 10년 마다 평균소득이 2배가 된다." 맨큐 경제학 교과서(617쪽)</p>
2단계 복리의 계산과 해석	복리의 계산을 통해 복리의 효과를 이해한다.	<p>(A) 복리계산법을 먼저 배운다 A원을 이자율 r 이라고 하면 1년 후의 금액은 $A(1+r)$ 2년 후에는 $A(1+r)^2$</p> <div style="text-align: center;"> <p>복리 계산법</p> <p>1회차 말 원금 + 이자 = 원금(1+이자율)</p> <p>2회차 말 원금(1+이자율) + 원금(1+이자율)×이자율 = 원금(1+이자율)²</p> <p>3회차 말 원금(1+이자율)² + 원금(1+이자율)²×이자율 = 원금(1+이자율)³</p> <p>n회차 말 = 원금(1+이자율)ⁿ</p> </div>

1) 한국경제신문 2021-11-1

추동질문		매년 4%씩 성장하면 몇 년 만에 우리의 부는 2배가 될까?
단계	소주제	내용
		<p>(B) 경제성장률에의 적용 여기서 r은 성장률 부가 2배가 되는 연수를 x 라고 하면 $A(1+r)^x = 2A$ 에서 $(1.04)^x = 2$ 를 풀면 됨</p> <p>(C) 구체적 계산에 동원되는 수학 기법 로그를 통해 해당 문제의 정답을 구한다. 양변을 log를 취하면 $x = \log 2 / \log 1.04$ 즉 17.7년 만약 성장률이 2%라면 35년 만약 성장률이 10%라면 7.3년 소요</p>
3단계 비교와 정리		<ul style="list-style-type: none"> 성장률의 계산과 같은 유사한 계산법의 사례를 찾아보자 이자율(복리)계산: 성장률 계산을 위해 꼭 알아야 하는 것은 이자율의 복리계산법이다. 투자의 할인율과 현재가치법 계산: 미래가치 계산을 거꾸로 하면 미래수익의 현재가치를 계산할 수 있다. <div style="text-align: center;"> <h2>현재가치 계산기</h2> $PV = \frac{FV}{(1 + \text{할인율})^n}$ <p>- PV: 현재가치 - FV: 미래가치 - n: 미래시점까지 연 또는 월 수</p>  </div>
4단계 유사문제풀이		<ul style="list-style-type: none"> 이자율(복리)계산: 이자율이 4%면 자산이 2배 되는데 약 18년이 걸린다. 이는 현재 금액의 미래가치를 계산하는 것이다. 투자의 현재가치: 할인율이 올라가면 현재가치는 떨어지고, 할인율이 내려가면 현재가치는 올라간다. 기계의 연간 수입은 동일해도 이자율에 의해 현재가치 차이가 매우 크게 나타난다. 이는 미래 수익의 현재가치를 계산하는 것이다. <div style="text-align: center;">  <p>현재 (현재가치, PV) ↔ 복리계산과정 (고려 요소: 이자율(r), 기간(n), 이자계산방법) ↔ 미래 (미래가치, FV) ↔ 할인계산과정</p> <p>waytoliah.com</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> 공공투자를 해야 할 것인가 말 것인가의 평가에도 투자의 현재가치법은 중요한 역할을 수행한다.
5단계 최종 판단과 해설	결론	<ul style="list-style-type: none"> 복리계산법은 경제 현상을 이해하는데 매우 중요한 역할을 한다. 이자율, 성장률의 미세한 차이는 시간이 흐를수록 큰 차이를 유발한다. 만약 어떤 공공투자의 비용편익 분석을 할 때, 할인율을 어떻게 가정하느냐에 의해 결론은 달라진다.

(2) 연습문제

① 복리의 마법²⁾

- 지금으로부터 390년 전인 1626년, 네덜란드 동인도 회사의 총독인 피터 미누이트는 미국 인디언들에게 단돈 24달러를 주고 맨해튼 섬을 구입했다. 만약 이 24달러를 받았던 인디언들이 매년 8%의 복리로 24달러를 운용했다면 어땠을까. 390년 동안 복리 8%로 24달러를 운용한다면 그 금액은 대략 260조 달러로, 지금의 맨해튼 섬을 모두 사고도 돈이 남게 된다. 복리의 힘이 이렇게 대단하다.
- 흔히 투자를 말할 때 ‘복리의 마법과 72의 법칙’이 거론된다.
- 72의 법칙이란 복리의 원리를 설명하는 개념으로, 자산을 두 배 늘리는 데 걸리는 시간을 계산하는 방식을 뜻한다. 72를 연간 이자율(투자수익률)로 나눠 나온 값을 통해 자금규모가 두 배가 되기까지의 기간을 개략적으로 알 수 있기 때문이다.
- 예컨대 은행의 일반 정기예금 이자율이 연 4%라고 가정할 경우, 원금 1억 원이 2억 원이 될 때까지의 기간은 72 나누기 4, 즉 18년이 걸린다. 같은 맥락에서 만약 복리 10% 이자를 받는 금융상품에 투자하고 있다면 원금이 2배가 되는 시점은 72를 10으로 나눈 약 7년 정도로 예상할 수 있다.
- 당초 72의 법칙은 ‘복리의 마법’이라 불리며 복리의 매력을 부각하는 데 활용됐다. 그러나 최근에는 시중은행의 보통예금 금리가 연 0~1%대에 머무는 등 저금리 기조가 이어져 의미가 다소 퇴색했다. 이는 예금 금리가 1%일 경우 원리금이 두 배가 되는 시간은 약 72년이나 소요되기 때문이다. 여기에 이자소득세 등을 제외하고 나면 사실상 마이너스 금리나 다름없게 된다.
- 그럼에도 복리의 힘을 간과할 수는 없다. 1억 원을 연 1%의 금리로 은행에 2년간 예금했다고 가정할 경우, 만기 시 원리금은 단리의 경우 1억200만 원이지만 복리는 1억201만 원이다. 2년 새 약 1만 원 밖에 차이 나지 않지만 이렇게 10년 동안 예금하면 그 차이는 46만 원(단리 1억1000만 원, 복리 1억1046만 원)으로 크게 벌어진다.
- 단리의 경우 ‘100의 법칙’이 적용된다. 예컨대 연 3%의 단리 예금상품에 가입할 경우 원금이 두 배가 되는 데까지 약 33년 4개월이 걸린다. 반면 같은 기간 복리식 예금상품이라면 원금은 24년 만에 두 배로 불어난다.
- 금융투자업계 관계자는 “단·복리의 이자 차이는 시간이 지날수록 또 금리가 높을수록 더욱 큰 폭으로 벌어진다”라면서 “특히 저금리 상황에서는 작은 수익률 차이가 가져오는 결과가 더욱 크게 나타날 수 있다”고 설명했다.

2) ‘복리의 마법’ 72의 법칙이란?, 매일경제, 2016.12.6.

② 투자의 현재가치법

- 투자로부터 발생할 현금유입의 현재가치에서 현금유출의 현재가치를 차감하는 방법이다. NPV(순현재가치) > 0 이면, 현금유입이 현금유출보다 더 크다는 것이므로 투자 타당성이 있다는 것이고, NPV < 0 이면, 현금유입보다 현금유출이 더 크다는 것이므로 투자 타당성이 없다는 것이다.
- 순현재가치(NPV)측정의 예
- [예 1] 편익과 비용이 다음 <표 8>와 같이 추정되는 가상적인 두 가지 프로그램 대안이 있다. 할인율이 0% 및 10%일 때 순현재가치의 기준에 의하여 두 대안을 비교하라.

<표 8> 프로그램 대안의 편익과 비용

(단위: 억원)

연도	대안	0	1	2	3	4	5
1	편익	0	20	40	60	80	100
	비용	90	40	30	20	10	0
2	편익	0	40	40	40	40	40
	비용	70	10	10	10	10	10

- [해] ① 할인율이 0%인 경우

$$(NPV)_1^{\text{§}} = (20+40+60+80+100) - (90+40+30+20+10) = 110(\text{억원})$$

$$(NPV)_2 = (40 \times 5) - (70 + 10 \times 5) = 80(\text{억원})$$

- ② 할인율이 10%인 경우

$$(\text{편익의 현재가치})_1 = 20/(1+r) + 40/(1+r)^2 + 60/(1+r)^3 + 80/(1+r)^4 + 100/(1+r)^5$$

$$= 20(0.9091) + 40(0.8264) + 60(0.7513) + 80(0.6830) + 100(0.6209)$$

$$= 214.684(\text{억원})$$

$$(\text{비용의 현재가치})_1 = 90 + 40/(1+r) + 30/(1+r)^2 + 20/(1+r)^3 + 10/(1+r)^4$$

$$= 90 + 40(0.9091) + 30(0.8264) + 20(0.7513) + 10(0.6830)$$

$$= 176.288(\text{억원})$$

$$\text{따라서 } (NPV)_1 = (\text{편익의 현재가치})_1 - (\text{비용의 현재가치})_2^{\text{§}}$$

$$= 214.684(\text{억원}) - 176.288(\text{억원})$$

$$= 38.296(\text{억원})$$

한편 대안 2의 경우 순현재가치를 동일한 방식으로 계산하면

$$= 43.724(\text{억원})$$

- 그러므로 할인율이 영(zero)인 경우에는 대안 1이 바람직한 대안이나 할인율이 10%인 경우에는 대안 2가 바람직한 대안이다.
- 위의 분석결과를 요약하면 <표 9>와 같다.

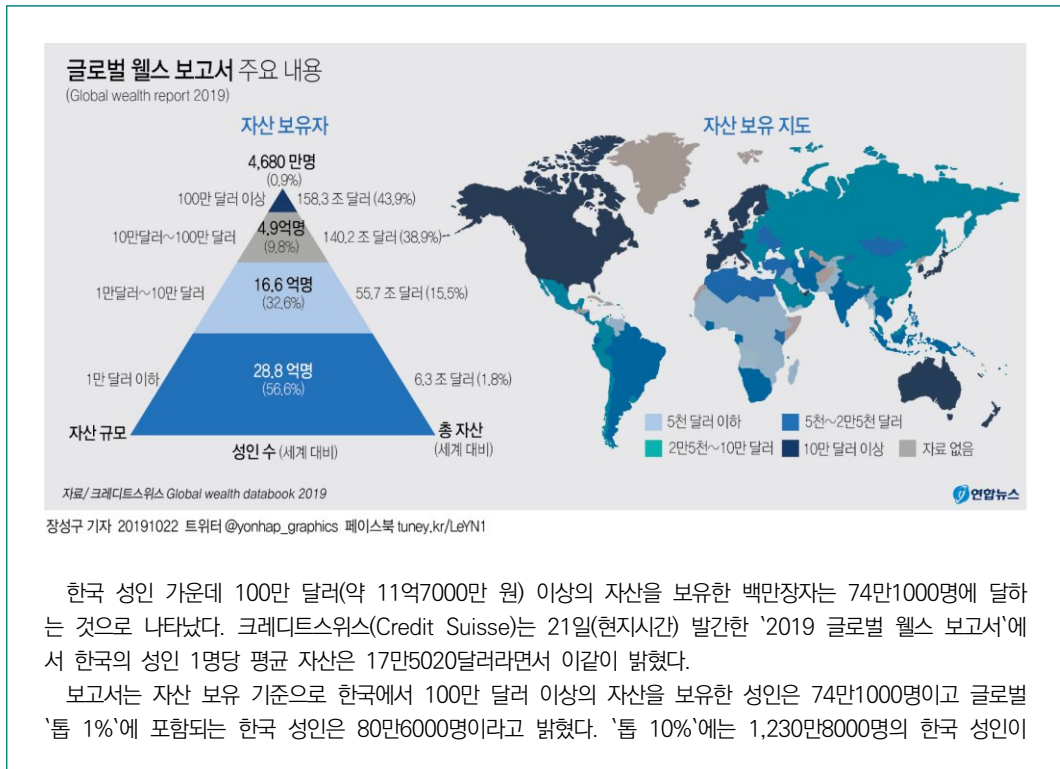
〈표 9〉 각 대안의 순현재가치

사업 대안	0%	10%
1	110(억원)	40.038(억원)
2	80(억원)	43.724(억원)

- 즉 동일한 미래 수입도 할인율에 따라 현재가치의 결괏값이 달라진다는 점을 알 수 있다.

2) 한국에서 백만장자 수는 74만 명...1인당 평균 자산은?3)

- 기초수학: 백분율
- 수준: 초급
- 신문기사 활용



3) 매일경제신문 2019-10-22 <https://www.mk.co.kr/news/economy/view/2019/10/857543/>

포함됐다고 집계했다.

한국 성인의 총자산은 7조3000억 달러로 집계했다. 1인당 성인의 평균 자산은 아시아-태평양 지역의 평균을 훨씬 웃돌고, 서유럽 국가와 유사한 수준이라고 설명했다. 보고서는 한국의 부 지니계수는 61%, 상위 1%가 전체 부에서 차지하는 비중은 30%라면서 한국의 평균 부는 높은 수준이고 부의 불평등은 상대적으로 낮다고 설명했다. 지니계수는 클수록 불평등이 심하다는 의미다.

한국인의 자산 가운데 비금융자산 비중은 높은 부동산 가격 등으로 63%에 달하고 이는 한국의 높은 저축률 등에 비춰볼 때 놀라운 수준이라고 보고서는 지적했다. 한국인의 부채는 전체 자산의 18%로 고소득 국가의 평균보다 높지만 걱정할 수준은 아니라고 보고서는 평가했다.

올해 중반 기준으로 지난 1년간 100만 달러 이상의 자산 보유자는 110만 명이 늘어났다. 100만 달러 이상 자산가의 나라별 분포는 미국 1,860만 명(67만5000명 증가), 중국 450만 명(15만8000명 증가), 일본 약 300만 명(18만7000명 증가), 호주 120만 명(12만4000명 감소) 등으로 분석됐다. 호주의 감소는 환율 탓이었다고 보고서는 분석했다. 100만 달러 이상의 자산가 중에서는 미국이 가장 많은 수를 차지하고 있지만, 상위 10%의 부자를 기준으로 할 경우에는 중국이 미국을 처음으로 앞섰다고 미 CNBC 방송은 전했다. 끝.

(1) 질문 만들기

1. 백만장자의 재산을 원화로 계산하면 얼마인가?
2. 우리나라의 백만장자 수(74만 명)는 우리나라 인구(5,185만 명)의 1%보다 많은가?
3. 전세계 백만장자는 4,680만 명이다. 이 중 우리나라 백만장자의 비율은 몇 %인가?
4. 2019년 10월 세계인구는 77억3,888만 명이고 이중 우리나라 인구가 5,185만 명이라면, 우리나라의 인구는 세계인구의 몇 %인가?
5. 피라미드 그래프에서 세계 성인 인구를 계산하시오. 전체 인구에 대한 성인의 비율은 몇 %인가?
6. 피라미드 그래프에서 세계 총자산을 계산하시오.
7. 세계 성인 1인당 평균 자산을 계산하시오.
8. 위의 신문기사에 따르면, 한국 성인의 총자산은 7조3천억 달러로 집계되었고, 우리나라 성인 1인당 평균 자산이 1십7만5천2십 달러라고 한다.
 - (1) 우리나라 성인 인구는 몇 명인가?
 - (2) 우리나라 성인은 우리나라 인구의 몇 %인가?
 - (3) 세계인구의 성인 비율과 우리나라 인구의 성인 비율을 비교 분석하시오.
9. 위의 데이터를 다른 방법으로 표현하시오.
10. 우리나라의 지니계수가 61%라고 한다. 부의 불평등 정도가 어느 정도라고 추측할 수 있을까? 선진국과 개발도상국의 지니계수와 비교해서 설명하시오.

2 과학 및 응용 분야

1) 세포는 왜 작은가?

- 기초수학: 수리력, 산술
- 수준: 초급

(1) 세포의 이해

- 생물체를 구성하는 기본단위체는 세포(cell)
 - 지구상의 생명체는 세균(예, 대장균), 원생생물(예, 아메바), 효모 등과 같이 하나의 세포로 살아가는 단세포 생물체와 사람을 비롯한 고등 동·식물과 같은 다세포 생물체로 구분된다.
 - 대장균과 같은 세균은 1~2 μm 수준이나, 핵을 갖는 진핵세포는 직경이 5 μm (효모)에서 600 μm 에 이르기까지 크기가 다양하다⁴⁾. 한편, 신경세포의 경우는 길이가 수 미터에 달하기도 하고, 우리가 즐겨 먹는 달걀도 하나의 세포로 이루어져 있다.
 - 세포가 성장하여 일정한 크기에 도달하면 분열하여 2개의 세포로 증식되는데⁵⁾, 다세포생물의 경우 하나의 세포인 수정체가 지속적인 분열과 분화를 거쳐 조직(tissue)과 기관(organ)으로 구성된 (다세포성) 개체로 발달 된다.
 - 대부분의 고등동식물은 왜 단세포가 아닌 다세포로 구성되어 있고, 다세포 생물체를 이루는 세포의 크기는 앞서 언급한 바와 같이 세포는 현미경으로 관찰해야 볼 수 있을 만큼 그 크기가 작으므로 대부분의 다세포 생물체는 무수히 많은 세포로 구성되어 있다.
- 세포막은 세포 안팎으로 물질을 흡수·배출하는 통로
 - 세포는 증식과 생장 등의 생명현상 유지에 필요한 영양분을 흡수하고 대사하여 에너지도 얻고 (세포 성장과 증식에 필요한) 핵산, 단백질 및 지방 등과 같은 세포 구성 물질도 합성한다. 한편 세포 대사 결과 만들어진 대사산물은 세포 밖으로 분비하기도 한다. 이 같은 영양분과 대사산물의 유입과 배출은 세포와 주변 환경의 경계에 해당하는 세포막을 통하여 이루어진다.
 - 두 겹의 인지질층으로 이루어진 세포막을 가로지르는 물질의 흡수와 배출은 특정 종류의 물질만 선택적으로 이동 가능한 세포막 통로나 특정 물질이 잘 통과할 수 있도록 도와주는 세포막 단백질에 의해 이루어진다. 한편, 농도가 높은 곳에서 낮은 곳으로 이송될 때에는 에너지가 소모되지 않으나, 농도가 낮은 곳에서 높은 곳으로 이송될 때에는 에너지가 소모된다.

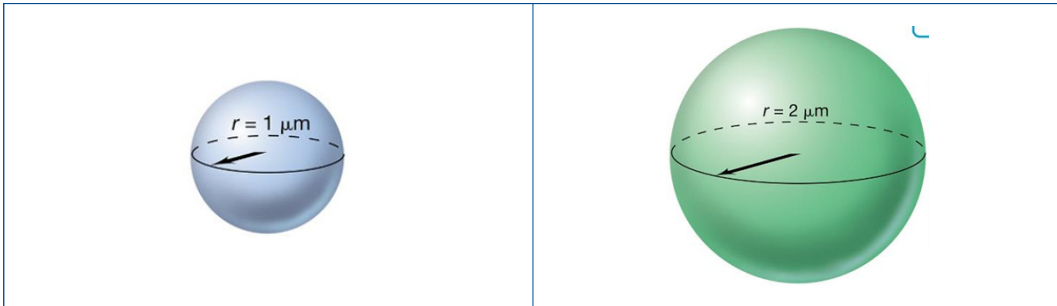
4) 세포의 크기 비교 애니메이션: <https://cellsalive.com/howbig.htm>

5) 세포 분열 및 증식 동영상: <https://cellsalive.com/ecoli.htm>, <https://cellsalive.com/cam2.htm>.

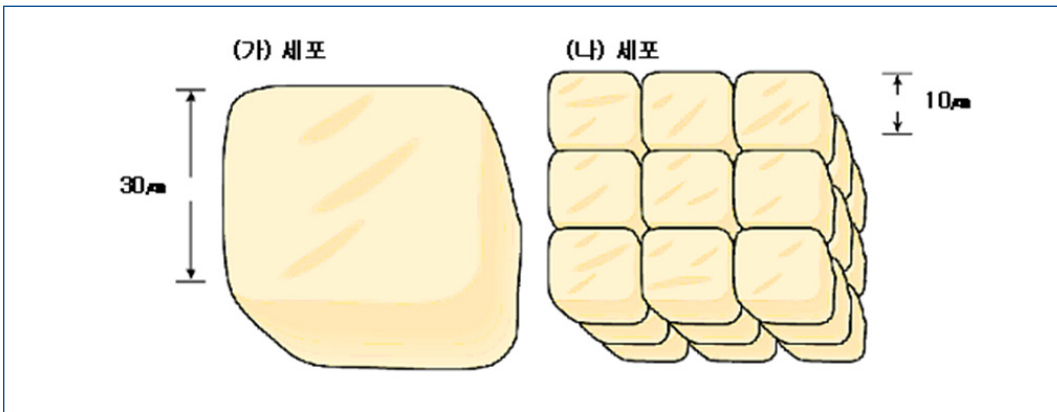
(2) 가정: 세포가 성장하여 커지면 분열하는 이유는 무엇일까?

- 세포가 하나의 세포 상태로 무한정 성장하는 것보다, 일정한 크기에 도달하면 분열하는 방식으로 증식하여 세포의 단위 부피당 표면적의 비율을 크게 함으로써, 물질이송이 더 잘 이루어져 (큰 세포보다 작은 세포가) 더 빨리 성장하기 위함일 것이다.

<예 1> 반지름이 각각 $1\ \mu\text{m}$ 와 $2\ \mu\text{m}$ 인 구형세포의 부피 당 표면적 비율은 어떻게 다른가?



<예 2> ‘가로/세로/높이’가 각 $1\ \mu\text{m}$ 인 세포가 $30\ \mu\text{m}$ 까지 성장하여 분열하는 경우<(가)세포>와 $10\ \mu\text{m}$ 까지 성장하고 분열하는 경우<(나)세포>, 부피가 작은 (나)세포 27 개와 부피가 큰 (가)세포 1개의 부피가 동일하다.



(3) 세포의 부피당 표면적 비율 계산하기

<예 1>

- 세포의 총 부피와 총 표면적으로 구한 후, 단위 부피당 표면적 비율 계산하기 (세포증식 고려 않기)

구분	반지름이 1 μm 인 세포	반지름이 2 μm 인 세포
세포의 총 부피 ($(4/3)\pi r^3$)	$4 \times 3.14 = 12.56$	$4 \times 3.14 \times 4 = 50.24$
세포의 총 표면적 ($4\pi r^2$)	$4 \div 3 \times 3.14 = 4.19$	$4 \div 3 \times 3.14 \times 8 = 33.49$
단위부피당 표면적 (표면적/부피)	$12.56 \div 4.19 = 3$	$50.24 \div 33.49 = 1.5$

- 반지름이 3, 4, 5 μm 등으로 커지면 단위 부피당 표면적 비율이 어떻게 변화하는지 계산한 결과 값으로 표 만들기와 그래프 그리기

반지름	세포의 총 부피	세포의 총 표면적	단위부피당 표면적 (표면적/부피)
1	$4 \times 3.14 = 12.56$	$4 \div 3 \times 3.14 = 4.19$	$12.56 \div 4.19 = 3$
2	$4 \times 3.14 \times 22 = 50.24$	$4 \div 3 \times 3.14 \times 23 = 33.49$	$50.24 \div 33.49 = 1.5$
3	$4 \times 3.14 \times 32 = 113.04$	$4 \div 3 \times 3.14 \times 33 = 113.04$	$113.04 \div 113.04 = 1$
4	$4 \times 3.14 \times 42 = 200.96$	$4 \div 3 \times 3.14 \times 43 = 267.95$	$200.96 \div 267.95 = 0.75$
5	$4 \times 3.14 \times 52 = 340.00$	$4 \div 3 \times 3.14 \times 53 = 523.33$	$340.00 \div 523.33 = 0.65$

<예 2>

- 세포의 총 부피와 총 표면적으로 구한 후, 단위 부피당 표면적 비율 계산하기 (세포증식 고려 않기)

구분	(가) 세포	(나) 세포
세포의 총 부피	$30 \times 30 \times 30 = 27,000$	$30 \times 30 \times 30 = 27,000$
세포의 총 표면적	$30 \times 30 \times 6 = 5,400$	$10 \times 10 \times 6 \times 27 = 16,200$
단위부피당 표면적 (표면적/부피)	$5,400 / 27,000 = 0.2$	$16,200 / 27,000 = 0.6$

- 세포 분열횟수(세포 수)에 따른 부피와 표면적을 구한 후, 단위 부피당 표면적 비율을 계산한 결과 값으로 표 만들기와 그래프 그리기

구분	분열횟수	세포의 총 부피	세포의 총 표면적	단위부피당 표면적 (표면적/부피)
(가) 세포	1	$27,000 \times 21 = 54,000$	$5,400 \times 21 = 10,800$	$10,800/54,000 = 0.2$
	2	$27,000 \times 22 =$	$5,400 \times 22 =$	

구분	분열횟수	세포의 총 부피	세포의 총 표면적	단위부피당 표면적 (표면적/부피)
	3	$27,000 \times 23 =$	$5,400 \times 23 =$	
	4	$27,000 \times 24 =$	$5,400 \times 24 =$	
	5	$27,000 \times 25 =$	$5,400 \times 25 =$	
(나) 세포	1	$27,000 \times 21 = 54,000$	$16,200 \times 21 = 32,400$	$32,400/54,000 = 0.6$
	2	$27,000 \times 22 =$	$16,200 \times 22 =$	
	3	$27,000 \times 23 =$	$16,200 \times 23 =$	
	4	$27,000 \times 24 =$	$16,200 \times 24 =$	
	5	$27,000 \times 25 =$	$16,200 \times 25 =$	

(4) 해석하기

〈예 1〉

- 반지름이 커질수록(세포가 커질수록) 세포의 단위 부피당 표면적 비율이 감소한다.
- 큰 세포가 세포 안팎으로 물질을 내보내고 받아들이기 어렵다.

〈예 2〉

- ‘(나)세포’의 단위 부피당 표면적이 3배 더 크다.
- 작은 세포가 세포 안팎으로 물질을 내보내고 받아들이기 쉽다.

(5) 확장 개념

- 〈예 1, 2〉에서 추정하였듯이, 작은 세포가 세포 안팎으로 물질을 내보내고 받아들이기 쉽다면 큰 세포에 비하여 어떤 장점을 갖게 될까?
- 〈예 2〉에서 보듯이, 두 세포가 동일한 부피에 도달하는 동안 총 표면적이 더 넓은 ‘(나)세포’가 더 많은 양의 세포막을 합성해야 함을 감안하면 어떠한 요인(조건)을 더 고려해 보아야 할까?
 - 에너지(또는 양분) 소모량이 다르다.
 - 세포분열 속도가 달라질 것이다.
- 세포는 얼마나 작아질 수 있을까?
 - 실제로 가장 작은 세균류인 마이코플라스마(Mycoplasma)류의 직경은 $0.2 \mu\text{m}$ 정도이고 부피는 $0.005 \mu\text{m}^3$ 로 알려져 있으며, 이론적으로 직경이 $0.15 \mu\text{m}$ 보다 작은 세포는 존재하지 않을 것으로 추정한다. 왜 그럴까?

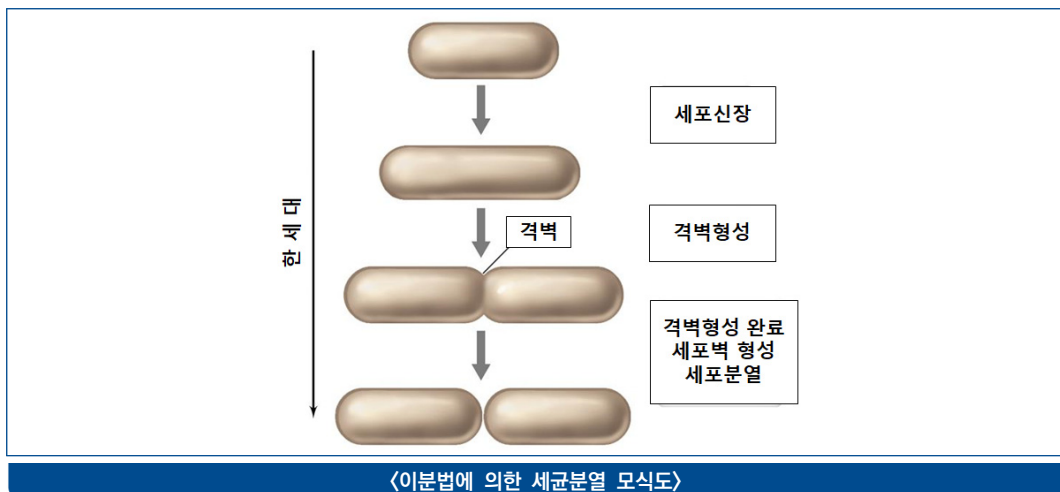
2) 여름철 야외식탁에 방치한 음식물에서 식중독을 일으키는 대장균이 얼마나 증식할까?

(1) 식품 유래 질병인 식중독(food poisoning)

- 식중독의 발생
 - 식중독은 병원균 또는 병원균이 생산한 독소가 오염된 음식물을 섭취할 때 발생하는데, 병원균 오염에 의한 질병과 독소 오염에 의한 질병은 각각 '식품 유래 감염'과 '식품 유래 중독'으로 구분한다.
 - 감염(세)균으로는 대장균(O157), 살모넬라균, 비브리오균 등이 있으며, 독소오염원인 중독(세)균으로는 클로스트리듐과 스태필로코쿠스 등이 있다.
- 세균(식중독 원인균) 증식에 미치는 환경 요인
 - 세균 증식은 용질과 수분활성도, 수소이온농도(pH), 온도, 산소농도, 염도 등에 영향을 받는데, 일반적으로 온도가 높고 습도가 높은 조건에서 양분이 풍부한 음식물(육류, 낙농제품, 어패류 등)에서 세균이 급격히 증식한다.
 - 따라서, 동일한 식품류라도 기온이 높고 습한 여름철이, 기온이 낮고 건조한 겨울철 보다, 세균 증식에 유리하므로 식중독이 더 잘 발생한다.

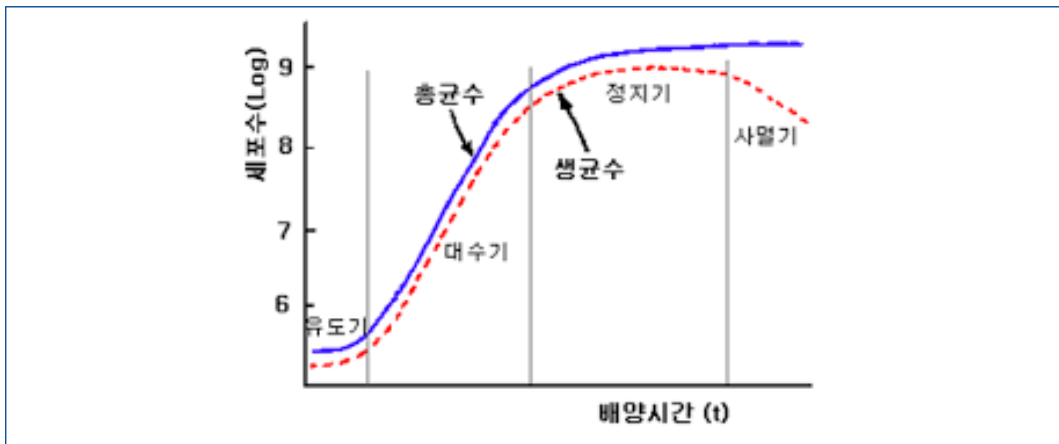
(2) 세균의 생장

- 세균의 증식(분열) 양상
 - 대장균 등의 세균은 일정한 크기에 도달하면 동일한 크기의 딸세포 두 개로 분열하는 이분법(binary fission)으로 증식한다.
 - 대장균의 경우, 최적 생장조건에서 20분마다 한차례 증식(분열)한다.



- 세균 성장곡선(growth curve)

- 일정한 양의 배지가 담긴 배양용기 내에서 세균을 배양(회분배양: batch culture)하면, 세균이 성장함에 따라 영양물질은 감소하고 성장을 저해하는 대사산물은 증가하여 점차 세균의 생장이 느려지다가 종국에는 멈춘다.
- 배양 시간대별 배양용기 내 총균수 측정치의 log값을 그래프로 나타내면, 유도기/대수기/정지기/사멸기로 나뉘는 에스자형(sigmoidal)의 성장곡선이 얻어진다.



- 유도기(lag phase)는 배양액에 접종된 세균이 적응하는 시기로 세포 수의 증가는 없으나 새로운 세포 구성성분을 합성하고, 신규 영양물질 사용에 필요한 효소를 합성하는 시기이다.
 - 대수기(log phase/ exponential phase)는 최고속도의 성장/분열기로 세포의 화학적 생리적 특징이 균일한 평형성장(balanced growth)이 이루어지는데, 배양용기 내 영양물질 농도에 따라 성장속도가 증가한다.
 - 정지기(stationary phase)는 세균 생장이 정지되는 시기로 총 균수가 대략 10⁹/ml 수준으로 일정하게 성장과 사멸이 평형을 이룬다. 정지기는 영양물질 부족, 독성노폐물 축적 및 세균집단의 임계밀도 등에 의해 발생한다.
 - 사멸기(death phase)는 총 생균수가 대수적으로 감소하는 시기이다.
- 세균 성장 측정법: '세포 수 직접 측정법'과 하거나 '세포 질량 측정법'이 있다.
- 세포 수 직접 측정법: 혈구계(hemocytometer)를 이용하여 현미경으로 측정하거나, 고체 배지에 형성된 세균집락(colony) 수에 희석배율을 곱하여 시료 내 생균수에 해당하는 집락형성단위(colony forming unit, CFU)를 측정한다.
 - 세포 질량측정법: 액체배양배지에 자란 세균을 수득/건조시켜 질량을 재는 '건조중량법'과

분광광도계로 세균현탁액의 흡광도(optical density, OD)를 측정하여 상대적인 세균수를 계수하는 '흡광도 측정법'이 있다.

(3) 세균 배가(세대)시간(doubling/generation time) 계산하기

- 배가시간은 대수기에서 이분법으로 분열하는 세포 수가 2배 증가하는데 소요되는 시간으로 아래와 같이 산출한다.

① $N_t = N_0 \times 2^n$
 (N_0 = 초기의 세포 수, N_t = 시간 t 에서의 세포 수, n = t 시간 동안의 세대수)

② 양변에 \log 를 취하면, $\log N_t = \log N_0 + n \log 2$

$$n = \frac{\log N_t - \log N_0}{\log 2} = \frac{\log N_t - \log N_0}{0.301} = \frac{\log N_t/N_0}{0.301}$$

③ 평균성장률상수: $K = n/t$ (단위시간당 세대수), 따라서, $K = \frac{\log N_t/N_0}{0.301t}$

④ 배가시간: $N_t = 2N_0$ 일 때의 시간 g 로 표현
 $K = \frac{\log 2}{0.301g} = 1/g$ 따라서, $g = 1/K$

⑤ 10시간 동안 103 에서 109으로 증가한 경우 g 값은 얼마일까?

$$K = \frac{\log N_t - \log N_0}{\log N_t - \log N_0} = \frac{\log 109 - \log 103}{(0.301)(10hr)} = 2.0\text{세대/hr}$$

따라서, 배가시간 $g = 1/K = 1 \text{ hr}/2.0\text{세대} = 30 \text{ min/세대}$

(4) 생장곡선 그려보기 1 - 이론상 생장곡선

- 여름철 야외식탁에 음식물을 6 시간 가량 동안 방치하였을 때, 시간 경과에 따라 증식한 총 세균수를 그래프로 그려보기

- 야외식탁에 방치하기 전 음식물에 상존하는 총 세균 수는 1×10^2 , 세균의 배가시간은 30분으로 산정하고, 총 균수는 \log 값은 Y축에 산술 값은 Z축에 각각 표시하여 보자 (엑셀을 사용하여 표를 만들고, 엑셀의 그림 그리기 기능을 이용하여 그래프 그리기).

〈방치 시간에 따른 음식물 내 세균 수〉

방치시간(시간)	총 세균 수	방치시간(시간)	총 세균 수
0	1 x 10 ²	3.5	() x 10 ²
0.5	21 x 10 ²	4	() x 10 ²
1	() x 10 ²	4.5	() x 10 ²
1.5	() x 10 ²	5	() x 10 ²
2.0	() x 10 ²	5.5	() x 10 ²
2.5	() x 10 ²	6	() x 10 ²
3	() x 10 ²	6.5	() x 10 ²

(5) 생장곡선 그려보기 2 - 실험(측정)값에 근거한 생장곡선

- '회분배양법'으로 배양하면서 30분 간격으로 세균 현탁액의 '흡광도를 측정하여 다음 같은 실험값을 얻었다. 이를 근거로 생장곡선을 그려보자 (엑셀을 사용하여 표를 만들고, 엑셀의 그림 그리기 기능을 이용하여 그래프 그리기).

〈회분배양 시간에 따른 흡광도〉

배양시간(시간)	흡광도(OD600)	배양시간(시간)	흡광도(OD600)
0	0	3.5	0.214
0.5	0.003	4	0.415
1	0.005	4.5	1.030
1.5	0.009	5	0.978
2.0	0.020	5.5	0.997
2.5	0.059	6	1.058
3	0.101	6.5	1.025

(6) 해석하기

- '이론상 생장곡선'과 '측정값에 근거한 생장곡선'의 양상은 어떻게 다른가? 다른 양상을 보이는 이유는 무엇일까?

실험(측정)값을 사용하여 배가시간 계산 해보기

(7) 확장 개념

- 실험(측정)값을 기존에 제시한 값과 유사하게 임의로 2 세트 더 기입한 후, 측정값 3 세트의 평균값과 표준편차를 구하여 그래프 그려보기(엑셀 사용).
- 배양 조건(배양온도, 항생제 첨가 등)을 달리하여 일정시간(대수기 중반까지) 배양하여 얻은 값을 위 '생장곡선 2'의 해당 시간대 값과 비교/분석하기 (예: t-테스트, p 값 계산하기 등)

3) 아이스커피 얼음; 덩어리 얼음과 곱게 간 얼음 중 어느 것이 더 시원할까?

- 기초수학: 로그함수, 확률
- 수준: 중급



(1) 얼음에서 물로 녹는 과정의 이해 [필요한 과학적 지식]

① 열역학 제2법칙 (엔트로피 증가법칙)

- 에너지 보존과 방향성

뜨거운 커피는 놓고 수다를 떨다 보면 커피가 식는다. 뜨겁다는 것은 분자의 에너지가 높다는 뜻이다. 커피가 식는다는 것은 커피의 에너지가 주변 공기의 에너지로 바뀐 것이고 같은 양의 에너지가 이동하여 에너지 보존 법칙은 성립한다. (참고로 열역학 제1법칙은 에너지 보존 법칙의 다른 이름이다.)

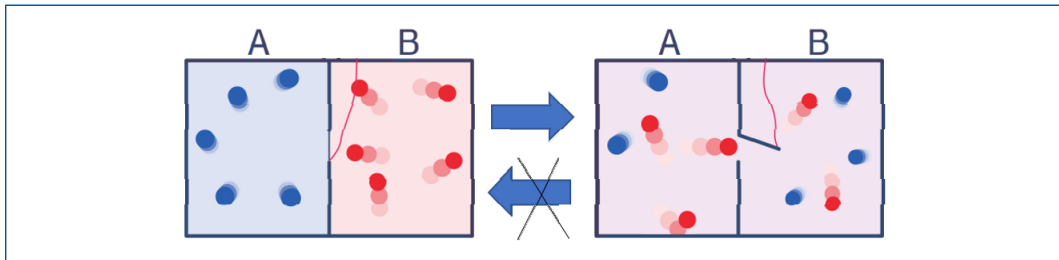
Q: 시간이 지나서 차가운 커피가 자연적으로 팔팔 끓을 정도로 뜨거워지는 일이 일어날까?

A: 절대 일어나지 않는다. 에너지의 전환에 방향성이 있음을 보여준다.

- 열역학 제2법칙은 이런 방향성을 설명한다.



- 이번엔 시원한 아이스 아메리카노가 만들어지는 과정을 살펴보자. 컵에 얼음을 여러 조각 담고 뜨거운 물과 뜨거운 에스프레소를 붓는다. 처음에는 얼음과 물과 에스프레소가 잘 분리돼 있다. 가만히 내버려 두면 눈에는 보이지 않지만 커피 분자들이 열심히 이리저리 충돌하면서 마치 비빔밥을 숟가락으로 젓는 것과 같은 효과가 나타난다. 충분히 오랜 시간이 지나면 얼음은 다 녹고 적당히 시원한 아이스 아메리카노만 남는다. 여기서 아무리 오랜 시간이 더 지나더라도 아이스 아메리카노가 다시 얼음과 뜨거운 물과 뜨거운 에스프레소로 돌아가지 않는다. 이는 엔트로피가 감소하는 방향이기 때문이다.
- 엔트로피란? 그럼 엔트로피가 무엇인지 알아보자.



- 온도가 높은 커피 (붉은색 공) 차가운 물 (푸른색 공)은 시간이 지나면서 점점 고르게 섞인다. 커피의 온도가 점점 내려가는 과정이다.

Q: 그런데 상자를 마구 흔들어서 한쪽에는 붉은색, 다른 쪽에는 푸른색 공만 있는 상태를 만들 수 있을까?

A: 공이 무작위로 움직이고 있다면 붉은색 공이 오른쪽에 놓일 '확률'은 1/2이다. 붉은색 공이 100개 있다면, 이들이 모두 왼쪽에 있을 확률은 $\frac{1}{2^{100}} \sim \frac{1}{10^{30}}$ 에 불과하다.

- 1초에 한 번씩 흔들면 얼마 만에 한번 일어날 수 있는 일일까?
 - 10^{22} 년 또는 우주 나이의 1조 배에 달하는 시간에 한 번 정도 일어날 수 있는 말이다. ---> 일어나지 않는다는 말과 같다. 이것이 열역학 제2법칙의 정체다.
 - 열역학 제2법칙을 확률로 설명했지만, 이것을 좀 더 정량화할 필요가 있다. 무작위로 흔들어서 100개의 공이 한쪽에 모이는 것보다 200개가 한쪽에 모이는 것이 더 힘들 것인데 이러한 차이를 정량적으로 기술하기 위해 도입된 물리량이 '엔트로피'다.
- (정의) 열을 온도로 나눈 값으로 정의, 엔트로피는 가역과정에서는 변하지 않고 비가역 과정에서 증가하는 물리량이다. <1852년 루돌프 클라우지우스>

→ 제2법칙은 “엔트로피는 결코 줄지 않는다.” 라고 표현할 수 있다.

Q: 왜 하필 ‘열을 온도로 나눈 값’ 일까?

A: 1872년 루트비히 볼츠만은 새년이 정의한 정보 엔트로피와 동일한 형태의 양이 항상 증가한다는 것을 알았다. (새년이 정보 엔트로피를 정의하기 76년 전의 일) 1877년 볼츠만은 특수한 상황에서 엔트로피가 $k_B \ln \Omega$ 로 주어짐을 보인다. Ω 는 주어진 조건하에서 일어날 수 있는 가능한 ‘경우의 수’, k_B 는 볼츠만 상수

- 경우의 수는 엔트로피 이해의 핵심을 담고 있다. (확률의 중요성)
- 엔트로피 계산, 직접 계산해보자.
- 주사위를 던지는 경우, 여섯 가지 가능한 경우의 수가 있으므로 볼츠만의 엔트로피는 다음과 같다.

$$k_B \ln 6$$

- 공 100개가 양쪽에 50개씩 존재하는 경우의 수 $\frac{100!}{50!50!} \sim 2^{100}$
- 엔트로피 $k_B \ln 2^{100} = 100k_B \ln 2 \sim 70.3 k_B$
- 모든 공이 한쪽에 있는 경우 1가지, 엔트로피는 0
- 엔트로피는 줄어들지 않으므로 $70.3 k_B$ 에서 시작해서 결코 0으로 될 수 없다. 쉬운 말로 하면 양쪽에 고르게 퍼져 있던 공이 한쪽으로 몰리는 일은 일어날 수 없다.

② 잠열 (엔트로피 에너지)

- 얼음을 녹이는데 필요한 열에너지, 잠열이란(엔트로피 에너지) 물로 상태 변화를 하기 위해서 필요한 에너지

$$\text{열량 } Q = \text{질량 } m \times \text{잠열 } r, \text{ 잠열의 단위는 kcal/kg}$$

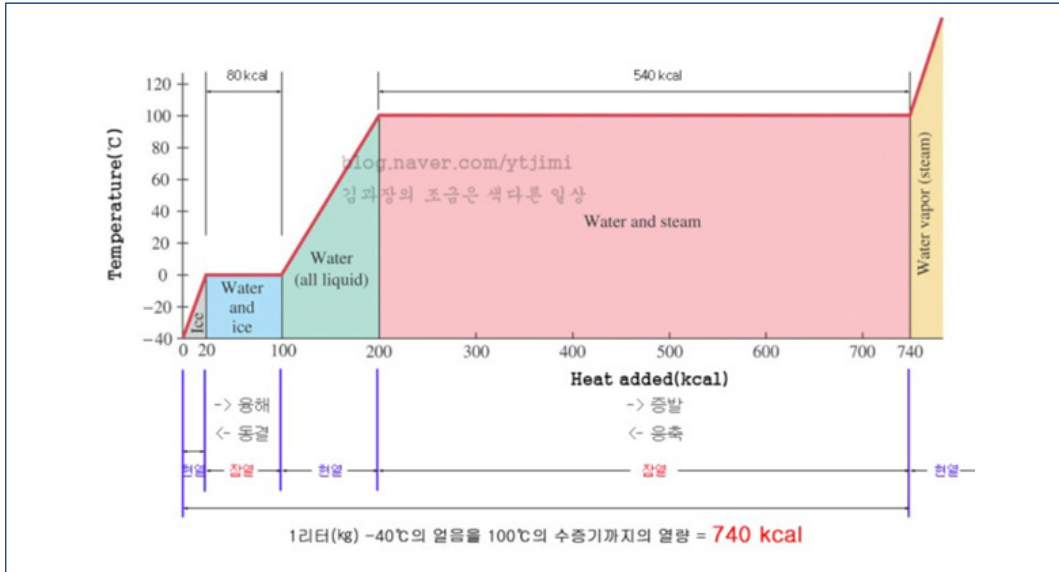
- 온도변화에 사용되는 열량

$$\text{열량 } Q = \text{질량 } m \times \text{비열 } c \times \text{온도변화 } \Delta t$$

- Q: 40도의 얼음 1kg이 녹아서 물 1리터(=1kg)가 되는데 필요한 열에너지 계산
(방법1) 아래 그래프를 주고 유추6)
(방법2) 액체 상태의 물의 비열 1 kcal/kg, 고체 상태 물의 비열 0.5 kcal/kg
- 얼음 1kg을 섭씨 1도 올리는데 0.5 kcal가 필요하고, 물 1kg을 섭씨 1도 올리는데 1 kcal가

6) <https://m.blog.naver.com/ytjimi/220961846654>

필요하다. 0도의 얼음을 0도의 물로 바꾸는 상태 변화하는데 80kcal 필요하다.



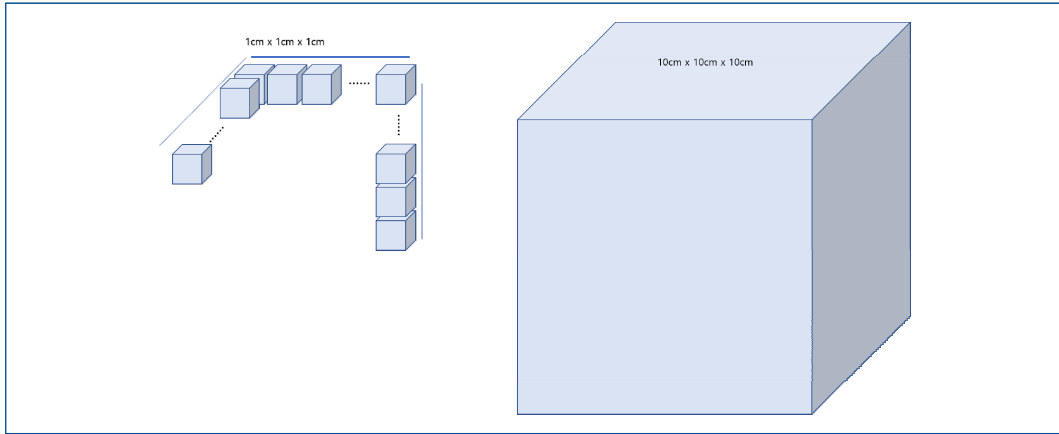
③ 열에너지의 전달 (전도), 커피에서 얼음으로 전달되는 에너지는 둘 사이의 접촉 면을 통해서만 전달된다.

- 얼마나 빨리 녹는가를 결정하는 요인 조사
- (시간의 개념 포함해서 고려해야 할 사항 나열) 둘 사이의 온도 차이, 접촉면의 크기, 접촉시간에 비례

(2) 가정과 모델링

- 질문 만들기
1kg의 얼음덩어리와 잘게 쪼갠 얼음덩어리를 동일한 커피가 담긴 컵에 넣고 커피의 온도를 측정한다. 어느 경우가 더 빨리 차가워지겠는가?
- 필요한 수식 적용해서 수치로 제시하기

① 하나의 큰 얼음덩어리를 잘게 쪼개면 얼음덩어리는 몇 개가 되는가?



→10개×10개×10개=10³개

② 면적의 차이는?

---> (10×10×6면) vs. (1×1×6면)×10³, 10배 차이

③ 면적에 비례하게 열에너지가 전달되니, 면적의 비율만큼 얼음의 녹는 시간이 빨라진다.

---> 10배 빨리 녹는다.

(3) 응용

- 빙하의 얼음과 냉장고 안의 얼음이 녹는 시간 계산
- 냉장고 안의 얼음이 더 빨리 녹는다. 빙하는 부피에 비해 표면적이 상대적으로 작기 때문에 침투하는 열에너지가 작다.

(4) 추가

- 지난 8년간 녹은 빙하 양 계산해보자.
- 자료 수집 문제로 가능한가??)
- 지구온난화 영향, 녹은 얼음의 두께를 측정한 결과 4.3조 톤이 녹았다.
 - 지구 해수면이 1.2cm 상승했다. 미국의 영토로 환산해 보면 미국 전역을 45cm 두께로 덮을 수 있는 물의 양⁸⁾

7) <https://zdnet.co.kr/view/?no=20120209160429>

8) <https://www.seoul.co.kr/news/newsView.php?id=20210429023004>

4) 역도 경기에서 체중과 기록은 비례할까?

- 기초수학: 차원 분석, 함수
- 수준: 중급
- 올림픽 기록 데이터 활용


(1) 질문의 배경

① 역도의 기록 = 인상 + 용상


- 몸무게 3배 드는 비밀은? 9)

역도의 기본 자세


자료: 한국스포츠개발원




① (준비 자세) 무릎이 90도 이상 펼쳐지고 상체를 좀더 숙인다.




② 바벨이 무릎까지 올라갈 때 고관절 각도는 그대로 유지하고 무릎이 펴지는 동작.



③ 무릎 관절이 접히면서 상체는 반대로 펴지는 동작.



④ 상하체를 동시에 쓰고, 바벨을 몸 가까이에 최대한 붙여 올린다.



인상: ②~④번을 연속으로 바로 머리 위까지 바벨을 들어 올림.
용상: 가슴 위로 바벨을 올린 뒤 머리 위로 들어 올리는 두번째 동작이 있다.

2012 런던올림픽 역도 남자 최경량급인 56kg급 금메달리스트는 북한의 엄윤철이었다. 그는 용상에서 168kg을 들어 올려 인간의 한계라는 자신의 몸무게 3배를 정확히 들어 올렸다. 중량급으로 올라갈수록 비율은 점차 줄어들어 105kg급에서는 자신 몸무게의 2.16배(227kg)에 그쳤다.

역도는 인간 힘의 한계를 측정하는 만큼 근력이나 순발력 등 신체 능력이 많은 영향을 주는 종목이다. 그만큼 약물 유혹도 많은 종목이다. 그러나 자신의 3배 무게를 들어올리기 위해서는 그저 힘만으로는 불가능하다.

바벨을 가장 몸 가까이 붙여서 들어올려야 좋은 자세라고 할 수 있으며, 바벨이 몸에서 많이 떨어질수록 근육이 더욱 많이 사용된다. 또 좌우 균형도 중요한 변수다. 잠깐 무게가 한쪽으로 쏠리는 순간 바벨을 놓치는 장면을 자주 볼 수 있다. 선수의 자세가 효율적이고 균형 잡혀 있어야만 사고가 나지 않는다.

② 선수의 기록과 체중과의 관계는?

- 2016년 논문, 남, 여 고등학교 역도선수들의 체중감량이 경기기록에 미치는 영향¹⁰⁾
 - 목적은 남녀 고등학교 역도 선수들의 체중감량과 역도 기록과의 관계를 규명하는 것이다.
 - 남녀 고등학교 역도부 56개교 중 남자 329명, 여자 110명 중 연구대상자는 무선표집 방법

9) https://www.hani.co.kr/arti/sports/sports_general/754735.html

10) <https://www.kci.go.kr/kciportal/ci/sereArticleSearch/ciSereArtiView.kci?sereArticleSearchBean.artid=ART002678155>

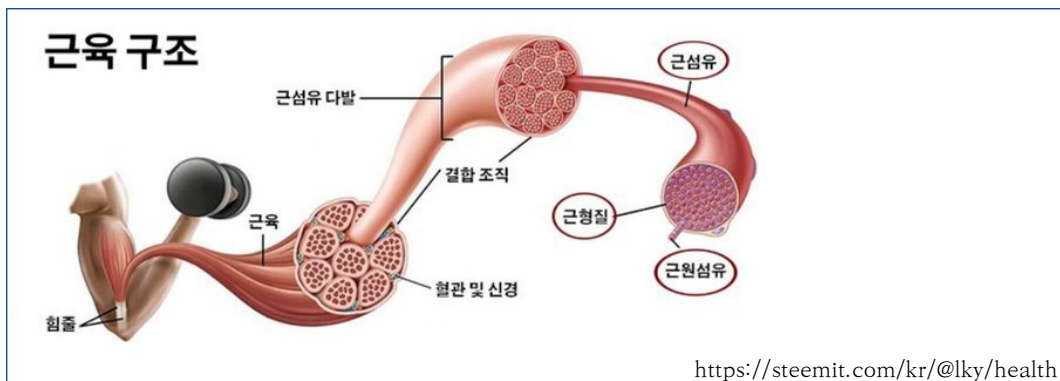
을 이용하여 20개 학교 남자 144명, 여자 56명 총 200명을 선정하였다.

- 남녀 모두 경량급과 중량급에서도 체중감량(유·무)에 의한 기록의 변화는 평균 2.5kg 감소 하지만 시합에 영향을 미치는 기록변화는 없었다.
- 2008년 중앙일보 기사: 장미란 선수의 끝없는 체중 불리기 고통¹¹⁾
 - 역도에서 체중과 기록은 비례한다. 근력을 키우면서 몸무게를 늘리면 더 무거운 무게의 바벨을 들어 올릴 수 있다.
- 2019년 연합뉴스 기사¹²⁾: '역도 라이징 스타' 진윤성 "체중 불리고 함께 420kg까지"
 - 역도에서는 체중과 기록이 비례한다. 실제 진윤성도 94kg급에 출전하던 2015년에는 함께 360kg 내외를 들었지만, 102kg급에서는 400kg을 넘겼다.
 - 한국 남자 역도의 간판 진윤성이 8월3일 도쿄 국제포럼에서 열린 2020 도쿄올림픽 역도 남자 109kg급 경기에서 인상 180kg, 용상 220kg, 함께 400kg으로 6위를 차지했다. 2019년 9월 타이 파타야에서 열린 세계역도선수권대회 102kg급에서는 인상 181kg, 용상 216kg, 함께 397kg을 들어 함께 2위에 올랐다.

(2) 가정과 모델링: 근육의 법칙

- 근육에 의해 생성된 힘은 활성화된 근섬유(muscle fibers)의 수에 달려있다. 그러나 근육에 있는 근섬유 수는 태어날 때 고정된다. 개별 근섬유의 강도는 그 지름에 달려있다. 지름이 클수록 강하다. 아놀드 슈왈제네거는 근섬유를 많이 가지고 있는 게 아니라 단면적이 더 큰 근섬유를 가지고 있다. 그래서 근육의 법칙이란 다음과 같다.

“근육이 만들어내는 힘은 관여하는 근육의 단면적에 비례하지 그것의 길이와는 무관하다.”



11) <https://www.joongang.co.kr/article/3264962#home>

12) <https://www.yna.co.kr/view/AKR20191010034100007>

- 근육의 힘을 결정하는 중요한 요인 가운데 하나는 근육의 크기이다. 근력에 작용하는 근육의 단면적과 근육이 발휘하는 힘 사이에 큰 상관관계가 있다고 하는 것이 스포츠 생리학자들의 일반적인 의견이다. 즉 근육이 생성할 수 있는 힘은 길이가 아닌 근육의 단면적에 의존한다고 가정한다. 근육의 법칙은 사람의 근육이 길이에 관계없이 단면적 1 제곱센티미터당 30에서 100N(뉴턴) 사이의 힘을 생성할 수 있다는 것이다. 사람의 경우 근육의 생리적인 힘은 일반적으로 $\sim 40N/m^2$ 으로 근육의 단면적이 증가하면 근육의 힘 또한 증가하게 된다.
- 차원분석을 통해서 체중과 근력(기록)과의 관계를 설정한다.

체중 ~ [부피] = L^3 \Leftrightarrow $L \sim$ 체중 $^{1/3}$
 근력 ~ 힘 $F \sim$ [단면적] = $L^2 \sim$ 체중 $^{2/3}$
 근력 ~ 체중 $^{2/3}$

- 예를 들어, 근육의 법칙에 따라 체중이 60kg인 사람과 120kg 인 두 사람의 근력을 비교하면 120kg인 사람의 근력이 60kg의 사람보다 2배 더 크지 않고, $2^{2/3} = 4^{1/3}$ 배, 즉, 1.6배 ($1.63 = 4$) 정도 더 크다. 체중이 3배 더 무거우면 근력은 $3^{2/3}$ 배 더 크므로 $9^{1/3}$ 즉, 약 2배($2^3=8$, $2.13 = 9.26$) 더 크다.

(3) 자료 수집 및 분석

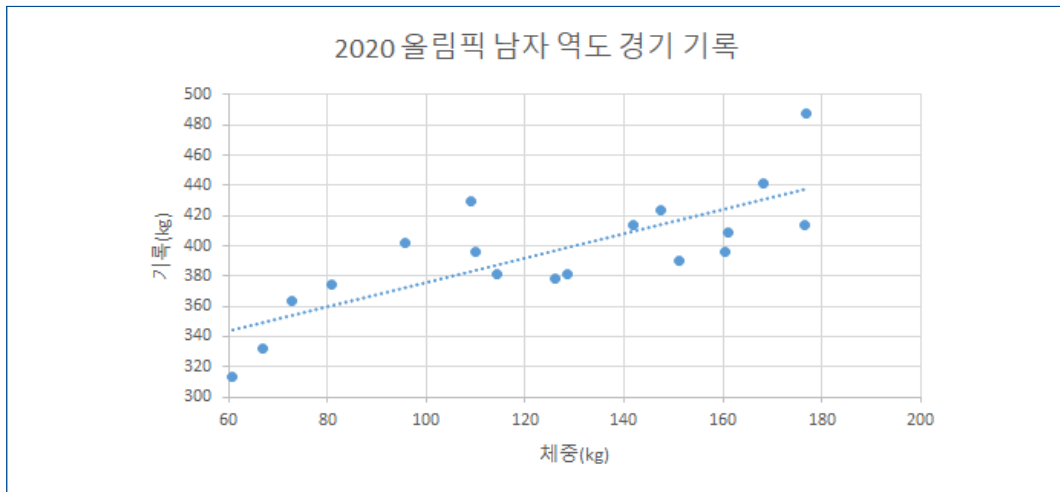
- 신뢰할 수 있고, 대표성이 있으며, 편견이 없는 자료를 수집한다.
- 2020 도쿄 올림픽 남자 역도 경기 결과¹³⁾

	이름	체중(kg)	체급(kg)	기록(kg)	인상(kg)	용상(kg)
1	Fabin LI	60.90	61	313	141	172
2	Lijun CHEN	66.85	67	332	145	187
3	Zhiyong SHI	72.85	73	364	166	198
4	Xiaojun LYU	80.75	81	374	170	204
5	Fares Ibrahim E. H. ELBAKH	95.70	96	402	177	225
6	Akbar DJURAEV	109.00	109	430	193	237
7	Marcos RUIZI VELASCO	109.90	109+	396	180	215
8	Sargis MARTIROSIAN	114.35	109+	381	180	201
9	Yun-Ting HSIEH	126.05	109+	378	172	206
10	David LITVINOV	128.60	109+	381	176	205

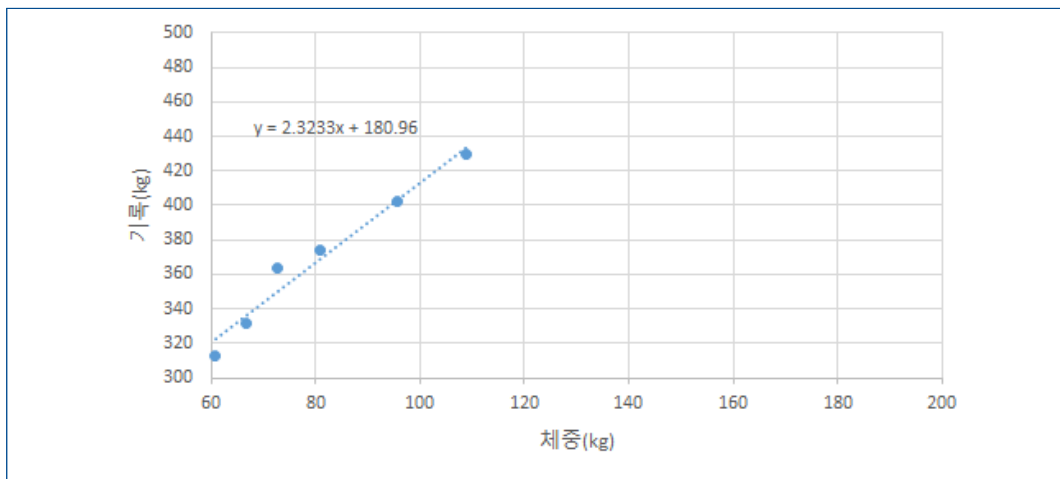
13) https://iwf.sport/results/results-by-events/?event_id=518

	이름	체중(kg)	체급(kg)	기록(kg)	인상(kg)	용상(kg)
11	Hojamuhammet TOYCHYYEN	141.85	109+	414	184	230
12	Man ASAAD	147.55	109+	424	190	234
13	Caine Morgan WILKES	151.15	109+	390	173	217
14	Peter NAGY	160.30	109+	396	178	218
15	Enzo Kofi KUWORGE	161.10	109+	409	175	234
16	Ali DAVOUDI	168.25	109+	441	200	241
17	David Andrew LITI	176.55	109+	414	178	236
18	Lasha TALAKHADZE	177.00	109+	488	223	265

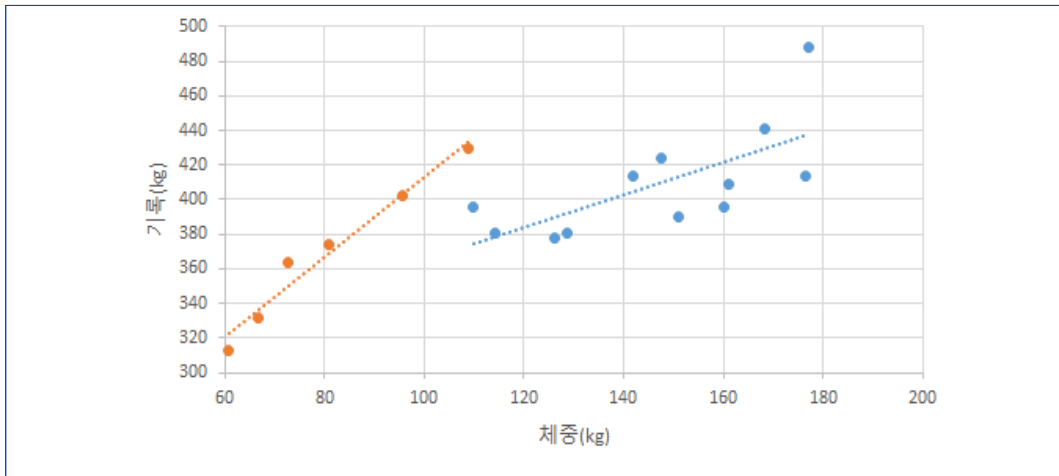
- 체중과 기록과의 관계



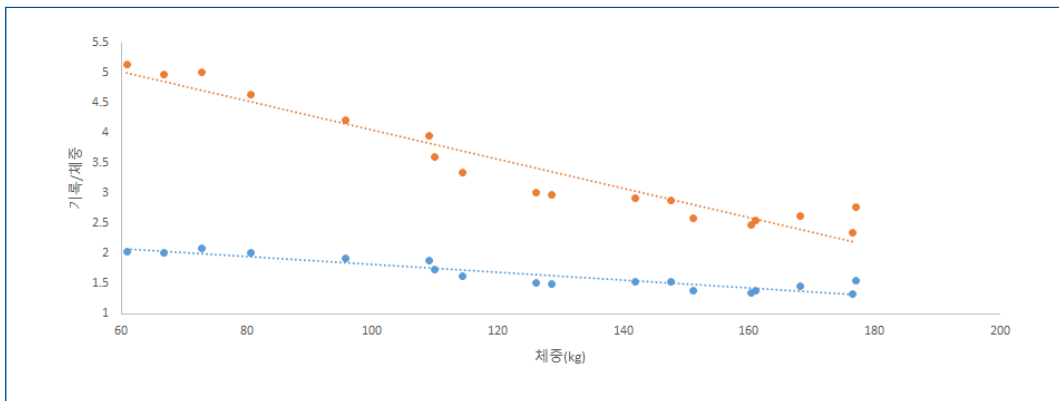
- 109 kg 이하 체급 선수들을 대상으로 체중과 기록과의 상관관계



- 18명 선수를 체급에 따라 두 그룹으로 나누어 기울기 확인



- 기록(=근력)을 체중으로 나누어서 근력과 체중의 관계를 확인한다. 주황색 선은 기록을 체중으로 나눈 것이고, 파란색은 기록을 체중^{2/3}로 나눈 것이다. 여기서 확인하고자 했던 가장 근력 ~ 체중^{2/3}을 만족하려면 파란색 그래프가 가로축에 평행한 선으로 보여야 한다.



(4) 결론

- 근육의 단면적이 증가하면 근육의 힘 또한 증가하게 된다. 이 근육 법칙의 의미는 무엇이며 어떻게 테스트할 수 있을까? 근육의 법칙에 따르면 근육의 힘은 면적 또는 길이의 제곱에 비례한다. 근육의 질량(또는 무게)은 부피 또는 세제곱 길이에 따라 달라진다. 따라서 힘은 체중의 2/3 제곱으로 올린 무게에 비례해야 한다.
- 역도 경기 데이터를 사용하여 이 가설을 테스트할 수 있었다. 근력에 가장 의존하는 스포츠 가운데 하나는 역도 경기이다. 힘이 단순히 체중에 비례하지 않는다는 것을 나타내는 선형이

- 아니라는 것을 눈으로 볼 수 있었다.
- 근육의 법칙을 테스트하기 위해 들어 올린 무게(즉, 힘)를 2/3 거듭제곱으로 올린 운동 선수의 무게로 나눌 수 있다. 근육의 법칙이 맞다면 결과는 일정해야 하며 이는 평평한 수평선을 의미한다.
 - 주황색 선은 들어 올린 무게를 단순히 선수의 체중으로 나눈 값을 나타낸다. 이것이 수평선이라면 근력은 실제로 근육의 부피에 비례한다는 것을 나타내며 근육의 법칙은 맞지 않는다. 파란색 데이터는 근육의 법칙에 따라, 기록 즉, 들어 올린 무게를 선수의 체중의 2/3 제곱으로 나눈 값을 보여주고 있다. 가장 바람직한 결과는 수평선이다. 그러나 아주 좋은 결과를 얻지 못했다. 우선 데이터 수집에서의 문제점을 찾는 것이 좋다.
 - 좋은 그래프의 목적은 언제나 다양한 정보를 정확히 요약해주고 아울러 패턴으로 관계를 파악하길 선호하는 눈-뇌 체계에 적합하도록 정보를 시각적으로 보여주는 것이다. 다만 그래프가 정보는 물론이고 그릇된 정보도 줄 수 있다.¹⁴⁾
 - 분석 결과를 신체의 근력에 적용해 본다. 가정에 추가할 내용이 더 있는지 확인한다.

3 보건 및 환경 분야

1) 한국인은 커피를 정말 좋아할까?

- 기초수학: 통계, 산술, 유효숫자
- 수준: 초급
- 신문기사 활용

‘커피’ 한 잔의 휴식 넘어... 삶의 일부가 되다.¹⁵⁾

(A) 도시의 혈류엔 카페인이라는 카페인을 공급하는 중심지, 도심 속 카페는 커피를 마시는 공간만이 아니다. 때로 혼자 시간을 보내고 싶은 곳, 사람 구경을 할 수 있는 곳, 대화를 나눌 수 있는 곳이기도 하다. 지난해는 코로나19 확산에도 한국인의 카페 사랑은 식지 않았는데, 높은 커피 소비국으로 인지되고 있는 한국의 2020년 커피 수입물량은 사상 최대 기록을 갈아치웠다. 관세청¹⁶⁾에 따르면 2020년 커피 수입액은 7억3780만 달러(약 8,300억 원)로 전년 대비 10.7% 늘었다. 이는 2017년, 2018년의 수입액에 비해 각각 12.5%, 15.7%가 증가된 금액이다. 또한 커피 수입량은 17만6648t으로 이는 2017년 커피 수입량에 비해 9.5% 증가된 양이며 한국은 2017년 이후 매년 전년에 비해 -0.6%, 5.5%, 5.1% 추이로 커피 수입량의 변화가 관찰된다. 모두 관련 통계가 작성된 2000년 이후 사상 최대치다.

(B) 미국 농림부(USDA) 자료에 의하면¹⁷⁾ 한국은 세계 8위에 달하는 커피 수입국으로 인구 대비 커피 수입량

14) 데이비드 헬펀드(2017) *생각한다면 과학자처럼*, 노태복 옮김, 도서출판 길벗, 132쪽
 15) 한국경제닷컴. 2021.4.14. ‘커피’ 한 잔의 휴식 넘어... 삶의 일부가 되다 (일부 수치 변경)

이 많은 나라임이 확인된다.

(C) 현대경제연구원 조사에¹⁸⁾ 따르면 성인 한 명이 1년간 마시는 커피는 2015년 291잔, 2016년 317잔, 2017년 336잔, 2018년 353잔으로 연간 커피 소비량 역시 계속 증가했다. 같은 기간 세계 평균 커피 소비량은 한국의 3분의 1 수준인 130~132잔으로 거의 변화가 없었다.

(D) 당신도 커피를 사랑한다면, 당신은 커피의 원가에 대해 얼마나 알고 있는가?

(1) 개요

- 우리나라의 커피 수입과 소비 데이터를 계산하여 소비변화추이를 인지하고, 이 같은 데이터를 재해석하여 그래프로 표현함으로써 사회현상을 쉽게 이해하고 설명할 수 있도록 한다.
 1. 질문이 원하는 효과(이해와 설명)를 얻을 수 있을지를 평가하는 것임을 먼저 인식한다.
 2. 통계의 수치와 데이터를 이해하고 해석할 수 있어야 한다.
 3. 기준에 근거한 데이터의 상대 비교로 정도와 순서를 나열할 수 있다.
- 양과 금액 단위를 어디까지 이용할지 결정하도록 한다. (유효숫자 활용)
 4. 마지막으로 한국인이 정말 커피를 좋아한다는 것을 밝히더라도, 소비되는 금액의 현실을 이해하고, 우리 스스로 커피 소비에 따른 결정이 필요함을 인지하도록 한다.

추동질문		한국인은 커피를 정말 좋아할까?
단계	소주제	내용
1단계 질문 이해	고려해야 하는 것	<ul style="list-style-type: none"> • 한국은 커피 생산국이 아닌 수입국이다. 그럼에도 커피공화국이라는 별명을 가질 정도로 커피를 좋아한다는 것을 무엇으로 설명할 수 있을까? 이를 설명할 여러 요인들을 고려해 보자. • 연도별 커피 수입액은 어느 정도인지? 수입량의 규모는 어떠한지? 통계자료를 활용하여 분석해보자. • 세계 여러 나라와 한국의 커피 수입량을 비교해 보자. 이때 커피 선호도를 수입량/총인구수로 생각하는 것은 맞는지? 총인구수 대비 수입량으로 선호도를 나타낼 수 없다면 실질적인 커피소비인구란 어떤 기준으로 정해야 할지? 고려해 보자. • 수입된 커피는 원두, 같은 원두, 액상형, 과립형, 믹스형 등 여러 형태로 가공, 제조되어 소비된다. 국민 개개인이 어떤 형태로 커피를 소비하는지에 대한 추적이 어렵다면, 카페에서 제공되는 원두를 활용한 커피 소비량은 얼마일까? • 또한 우리나라의 실질 커피 소비인구가 하루 소비하는 커피양은 얼마며, 이를 잔으로 표시한다면 얼마일까? • 나는 하루에 몇 잔의 커피를 마시는지? 똑같은 아메리카노인데 왜 가격이 천차만별인지? 싼 커피와 비싼 커피의 이익은 얼마인지? 실제 원가는 얼마 정도인지? 생각해 보자.
2단계 통계의 분석과	통계수치를 통해 자료의 정확성과	<p>(A) 연도별 (2017~2020) 커피수입액과 수입량을 계산한다. ※ [기준] 달리는 대략 1: 1,100으로 계산한다.</p> <p>(1) 수입액의 변화</p>

16) 관세청, 국민경제/수입금액 데이터

17) USDA(미국 농림부), Coffee raw data-Domestic Consumption,2020

18) 현대경제연구원, 2019. 7.12. 보도자료, 국내 커피산업 약 7조 원 규모로 성장!

추동질문		한국인은 커피를 정말 좋아할까?																												
단계	소주제	내용																												
해석	대략성을 추정한다.	<p>2020년 커피수입액, 7억 3789만 (\$) (= 812억(원))</p> <p>① 2020년 커피수입액이 2017년 대비 12.5% 증가, ∴ 2017년 커피수입액. X</p> <p>② 2020년 커피수입액이 2018년 대비 15.7% 증가, ∴ 2018년 커피수입액. Y</p> <p>③ 2020년 커피수입액이 2019년 대비 10.7% 증가, ∴ 2019년 커피수입액. Z</p> <p>X : $737,890,000(\\$)=1:(1+12.5/100)$ $= 737,890,000(\\$)/1.125 = 655,900\text{천} (\\$)=6.56*109 (\\$)$ 655,900천 (\$) * 1,100 (원)/(\$) = 721억(원)</p> <p>Y : $737,890,000(\\$)=1:(1+15.7/100)$ $= 737,890,000(\\$)/1.157 = 637,761\text{천} (\\$)=6.38*109 (\\$)$ 637,761천 (\$) * 1,100 (원)/(\$) = 701억(원)</p> <p>Z : $737,890,000(\\$)=1:(1+10.7/100)$ $= 737,800,000(\\$)/1.107 = 666,567\text{천} (\\$)=6.68*109 (\\$)$ 666,567천 (\$) * 1,100 (원)/(\$) = 733억(원)</p>																												
		<p>(2) 수입량의 변화</p> <p>2020년 커피수입량 X. X=17만 6 648 (t), 즉 176,648 (t)</p> <p>2020년 커피수입량, 2017년 수입량의 9.5% 증가 ∴ 2017년 커피수입량. A</p> <p>2018년 커피수입량이 2017년(A) 대비 -0.6% 변화 ∴ 2018년 커피수입량, B</p> <p>2019년 커피수입량이 2018년(B) 대비 5.5% 변화 ∴ 2019년 커피수입액. C</p> <p>[계산]</p> <p>① $(A + A * 9.5/100) = 176,648(t)$ 즉 $A * (1+0.095) = 176,648(t)$ ∴ A(t) = 161,322(t)</p> <p>② $B(t) = (A - A * 0.6/100)$ $= A * (1-0.006)=161,322(t)*0.994=160,354(t)$ ∴ B(t) = 160,354(t)</p> <p>③ $C(t) = (B + B * 5.5/100) =$ $= B * (1+0.055) = 160,354(t) * 1.055=169,173(t)$ ∴ C(t) = 169,173(t)</p>																												
3단계 값의 비교와 정리	통계수치를 자료에 맞게 변환하여 그래프로 변화추이를 표현한다.	<p>수입액과 수입량 자료를 이용하여 “커피수입 얼마나 했나?”를 변화추이 그래프로 표현해보자. 각각의 데이터를 엑셀 시트로 변환하여 적합한 그래프 형식으로 나타내 보자.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>수입액 천(\$)</th> <th>수입액 억(원)</th> <th></th> <th>수입량 (t)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2017</td> <td>655,900</td> <td>721</td> <td>2017</td> <td>161,322</td> </tr> <tr> <td>2018</td> <td>637,761</td> <td>701</td> <td>2018</td> <td>160,354</td> </tr> <tr> <td>2019</td> <td>666,567</td> <td>733</td> <td>2019</td> <td>169,173</td> </tr> <tr> <td>2020</td> <td>737,891</td> <td>812</td> <td>2020</td> <td>176,648</td> </tr> </tbody> </table>					수입액 천(\$)	수입액 억(원)		수입량 (t)	2017	655,900	721	2017	161,322	2018	637,761	701	2018	160,354	2019	666,567	733	2019	169,173	2020	737,891	812	2020	176,648
	수입액 천(\$)	수입액 억(원)		수입량 (t)																										
2017	655,900	721	2017	161,322																										
2018	637,761	701	2018	160,354																										
2019	666,567	733	2019	169,173																										
2020	737,891	812	2020	176,648																										

19) 통계청, 인구총조사 (데이터 재정리)

추동질문		한국인은 커피를 정말 좋아할까?
단계	소주제	내용

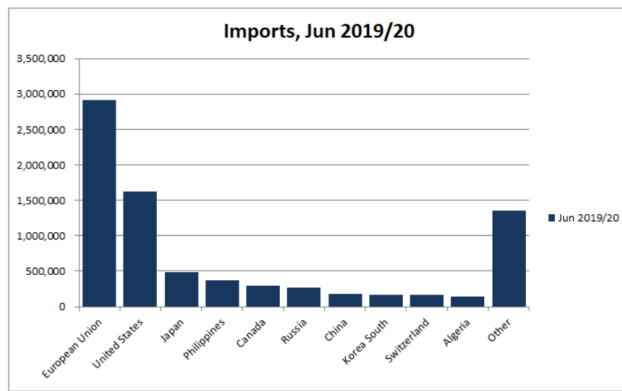


자료: 관세청 수출입 무역통계

(B) 나라별 커피수입량을 비교함으로써 우리나라의 커피 선호도를 막대그래프로 표현하여 상대 비교해 보자.

Imports							
Countries	2014/15	2015/16	2016/17	2017/18	2018/19	Jun 2019/20	인구수
European Union	2,708,400	2,769,000	2,763,000	2,845,800	2,940,000	2,910,000	510,343,378
United States	1,439,700	1,511,100	1,588,800	1,487,400	1,596,000	1,617,000	329,064,917
Japan	486,600	491,700	481,800	463,200	510,000	492,000	126,860,301
Philippines	225,300	371,100	385,200	366,000	372,000	369,000	108,116,615
Canada	269,700	272,700	273,000	285,000	283,200	294,000	37,411,047
Russia	243,000	263,700	284,400	267,900	267,000	274,500	145,872,256
China	113,340	176,280	212,040	162,300	165,000	174,000	1,433,783,686
Korea South	138,300	147,900	163,500	158,700	162,000	168,000	51,709,098
Switzerland	145,200	147,600	156,000	165,000	162,000	168,000	8,591,365
Algeria	131,700	139,200	132,300	138,000	140,400	146,400	43,053,054
Other	1,143,000	1,177,740	1,152,300	1,322,160	1,359,900	1,352,880	-
Total	7,044,240	7,468,020	7,592,340	7,661,460	7,957,500	7,965,780	-

USDA, Coffee raw data-Domestic Consumption, 2020



Total Imports, Jun 2019/20, Ton

4단계 유사자료 활용으로 질문 증명

타 사례 비교로 질문의 유의미를 증명

추동질문		한국인은 커피를 정말 좋아할까?																																
단계	소주제	내용																																
		<p>(C) 우리나라 인구 1인당 커피 소비량을 추정하여 보자. [자료] 2021년 우리나라 총인구수 19) (2021년 우리나라 총 인구수 남녀인구, 추계 주민등록인구)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>2015</th> <th>2016</th> <th>2017</th> <th>2018</th> <th>2019</th> <th>2020</th> <th>2021</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>전체</td> <td>51,014,947</td> <td>51,217,803</td> <td>51,361,911</td> <td>51,606,633</td> <td>51,709,098</td> <td>51,780,579</td> <td>51,821,669</td> </tr> <tr> <td>남자</td> <td>25,585,894</td> <td>25,670,949</td> <td>25,736,793</td> <td>25,863,502</td> <td>25,913,295</td> <td>25,945,737</td> <td>25,961,532</td> </tr> <tr> <td>여자</td> <td>25,429,053</td> <td>25,546,854</td> <td>25,625,118</td> <td>25,743,131</td> <td>25,795,803</td> <td>25,834,842</td> <td>25,860,137</td> </tr> </tbody> </table>		2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	전체	51,014,947	51,217,803	51,361,911	51,606,633	51,709,098	51,780,579	51,821,669	남자	25,585,894	25,670,949	25,736,793	25,863,502	25,913,295	25,945,737	25,961,532	여자	25,429,053	25,546,854	25,625,118	25,743,131	25,795,803	25,834,842	25,860,137
	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021																											
전체	51,014,947	51,217,803	51,361,911	51,606,633	51,709,098	51,780,579	51,821,669																											
남자	25,585,894	25,670,949	25,736,793	25,863,502	25,913,295	25,945,737	25,961,532																											
여자	25,429,053	25,546,854	25,625,118	25,743,131	25,795,803	25,834,842	25,860,137																											
		<p>2020년 연령별 총인구수(명)</p> <p>통계청 홈페이지, 인구총조사 (데이터 재정리)</p> <p>[참고] 총인구수가 커피 소비인구가 아니므로, 청년층(20~24세)~장년층(55~59세)을 실질 커피소비층으로 보고, 커피소비를 추론한다. (질문) 2019년, 2020년 커피 소비는 1인당 잔 수로 얼마나 될까? [커피 10g 소비/1잔]</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>2019년</th> <th>2020년</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>총인구수(명)</td> <td>51,709,098</td> <td>51,780,579</td> </tr> <tr> <td>실질 커피 소비인구(명)</td> <td>30,952,878</td> <td>31,652,652</td> </tr> <tr> <td>커피수입량 (t)</td> <td>162,000</td> <td>168,000</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr> <th>2019년</th> <th>2020년</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> $162,000(t)/30,952,878$ (명) $= 162*109$ (g)/$31*106$ (명) $= (162/31)*103$ (g)/(명) $= 5.22 \times 103$ $= 5,220$ (g)/(명) </td> <td> $168,000(t)/31,652,652$ (명) $= 168*109$ (g)/$32*106$ (명) $= (168/32)*103$ (g)/(명) $= 5.25 \times 103$ $= 5,250$ (g)/(명) </td> </tr> <tr> <td> $\{ 5,220(g)/(명) \}/10(g)/(잔)$ $= 522$ (잔)/(명) </td> <td> $\{ 5,250(g)/(명) \}/10(g)/(잔)$ $= 525$ (잔)/(명) </td> </tr> </tbody> </table>		2019년	2020년	총인구수(명)	51,709,098	51,780,579	실질 커피 소비인구(명)	30,952,878	31,652,652	커피수입량 (t)	162,000	168,000	2019년	2020년	$162,000(t)/30,952,878$ (명) $= 162*109$ (g)/ $31*106$ (명) $= (162/31)*103$ (g)/(명) $= 5.22 \times 103$ $= 5,220$ (g)/(명)	$168,000(t)/31,652,652$ (명) $= 168*109$ (g)/ $32*106$ (명) $= (168/32)*103$ (g)/(명) $= 5.25 \times 103$ $= 5,250$ (g)/(명)	$\{ 5,220(g)/(명) \}/10(g)/(잔)$ $= 522$ (잔)/(명)	$\{ 5,250(g)/(명) \}/10(g)/(잔)$ $= 525$ (잔)/(명)														
	2019년	2020년																																
총인구수(명)	51,709,098	51,780,579																																
실질 커피 소비인구(명)	30,952,878	31,652,652																																
커피수입량 (t)	162,000	168,000																																
2019년	2020년																																	
$162,000(t)/30,952,878$ (명) $= 162*109$ (g)/ $31*106$ (명) $= (162/31)*103$ (g)/(명) $= 5.22 \times 103$ $= 5,220$ (g)/(명)	$168,000(t)/31,652,652$ (명) $= 168*109$ (g)/ $32*106$ (명) $= (168/32)*103$ (g)/(명) $= 5.25 \times 103$ $= 5,250$ (g)/(명)																																	
$\{ 5,220(g)/(명) \}/10(g)/(잔)$ $= 522$ (잔)/(명)	$\{ 5,250(g)/(명) \}/10(g)/(잔)$ $= 525$ (잔)/(명)																																	
5단계 최종 판단과 해설	소비 금액과 수량, 소비 패턴을 통해 기호도가 높음으로 판단	<ol style="list-style-type: none"> 2017~2020년 한국인의 커피 수입액과 수입량이 지속적으로 증가하고 있음으로 선호도를 확인할 수 있다. 2017~2020년 한국인이 커피 수입량을 세계 각국의 수입량과 비교한 결과 세계 8위에 달하고 있음을 선호도를 확인할 수 있다. 한국인이 매년 1인당 마신 커피(잔수)를 세계의 커피(잔수)와 (2015년~2020년) 6년간 비교해 볼 때, 우리나라 국민 1인당 커피소비량이 높았고 이로써 선호도를 확인할 수 있다. 																																

(2) [커피 한잔 할까요?] 를 보고 커피 한잔에 드는 원가계산을 해 보자.

- 카페에서 판매되는 커피 한잔의 원가 계산과정을 알아보자.
- 원가를 10% 내리면 이익 증가율은 얼마일까?



- 카페에서 판매되는 커피 한잔의 원가 계산과정을 알아보자.

- 1) $690,000\text{원}/60\text{kg} = 11,500\text{원}/1\text{kg}$
- 2) 로스팅에 의한 손실률(20%) 감안한 원가 x
 $(\text{원가}, x) \quad 1 : 1.2 = 11,500 : x \quad \therefore x = 11,500 \times 1.2 = 13,800\text{원}$
- 3) 기본 에스프레소를 만드는데 필요한 원두: 18~20g/1잔
 즉 40~50잔 /1kg (단, 커피 세팅 시 분량률 발생, 40잔 정도 생성)
- 4) $13,800\text{원}/40\text{잔} = 345\text{원}/\text{잔}$
- 5) 시중커피원가가 130원~320원...왜? 커피가격은 3,000~15,000원인가?
 : 커피의 원두가는 천차만별로 업체마다 다양한 원두를 사용한다.
- 6) 그래도 345원/잔 원가인데 실제 판매가격은 4,000/1잔인 이유는?
 : 인건비 34%, 임대료 8.8%, 소모품비(기계비용 등) 4.9%, 복리 2.4%, 카드수수료 1.5%, 그 외 Utility 외 세금 등 추가
- 7) $4,000(\text{원}/\text{잔}) \times 100(\text{잔}/\text{일}) \times 30(\text{일}) = 12,000,000(\text{원}/\text{달})$
- 8) 원가 26%+지출 57%+(순이익, 17~18%)=100%
 순이익 $12,000,000(\text{원}/\text{달}) \times 18/100 = 2,160,000(\text{원}/\text{달})$
- 9) 인건비 중 로스팅+바리스타는 직접. 나머지는 디저트. 빵으로 만회.

- 원가를 10% 내리면 이익 증가율을 얼마일까?

	매출비용비율(A)	매출비용비율(B)(원가 10% 감소 후)
커피원가	26%	23.4
지출경비(수도 등...)	57%	57
순이익	17%	19.6
	100%	100%

(A)의 원가를 10% 감소시킨 (B)에서 나타난 이익에 따른 이익 증가율(r)은 15.33%.

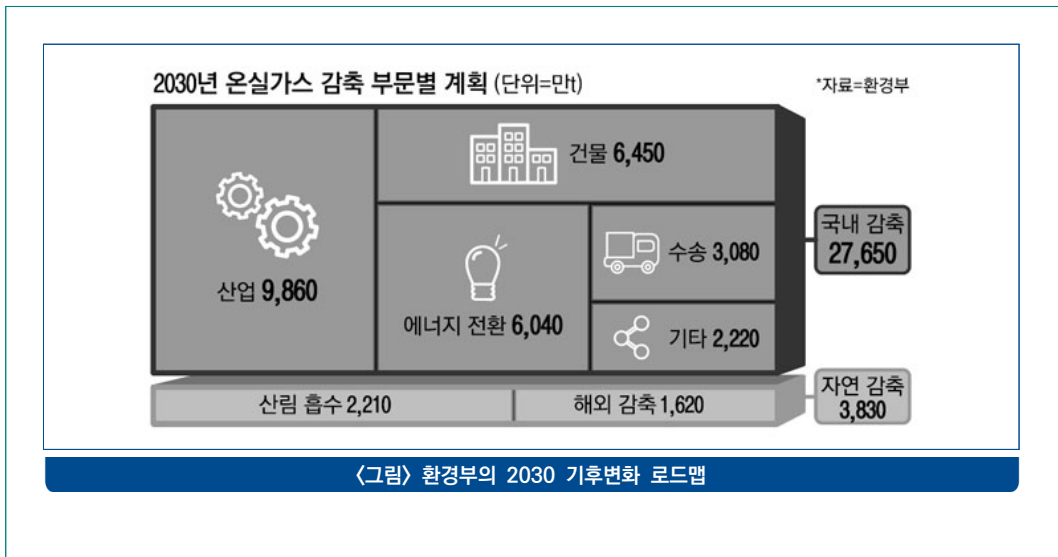
$$\text{이익 증가율} = \frac{(19.6-17)}{17} \times 100 = 15.3 (\%)$$

즉, 원가를 10% 감소 시 순이익이 10% 증가하고, 이익 증가율은 15.33%로 나타난다.

이로써, 품질이 낮은 커피를 사용 등 (커피) 원가관리를 통해 이율을 높일 수 있다.

2) 온실가스 감축은 가능할까?²⁰⁾

- 기초수학: 산술
- 수준: 하급
- 신문기사 활용



20) 매일경제신문 2019-10-22

정부가 2030년 온실가스 배출 전망치(BAU)의 32.5%(총 2억7650만t)를 줄이기로 했다. 환경부는 10월22일 이 같은 내용을 담은 '제2차 기후변화 대응 기본계획'이 국무회의에서 심의·의결됐다고 밝혔다. 핵심 내용은 석탄발전 감축과 재생에너지 확대에 대표되는 에너지 정책 전환이다. 다만 정부가 '탈원전' 드라이브를 걸고 있는 상황에서 '탈석탄' 정책까지 동시에 추구하겠다는 것은 현실성이 떨어진다는 지적이 나온다.

'제2차 기후변화 대응 기본계획'은 '2030 국가 온실가스 감축 로드맵'이 잘 이행되고 있는지 점검·평가하기 위한 체계를 만드는 계획이다. 기본계획에 따르면 한국은 2017년 7억910만t이었던 국내 온실가스 배출량을 2030년 5억3600만t으로 줄여야 한다. 이를 위해 8대 부문(전환·산업·건물·수송·폐기물·공공·농축산·산림)에서 대대적인 온실가스 감축을 추진한다. 또 2028년까지 형광등 단계적 퇴출, 2030년까지 전기차 300만대·수소차 85만대 도입, 배출량 중 유상할당 비중 상향 조정, 산업 현장에서 중유의 액화천연가스(LNG) 교체 등이 세부 계획으로 담겼다.

이 중 핵심은 에너지 전환 정책이다. 환경부는 석탄발전소 신규 건설을 금지하고 노후된 발전소는 폐쇄하며, 대신 재생에너지 발전 비중은 확대하는 친환경 에너지믹스 전환을 선포했다. 환경부 관계자는 "온실가스 중 87%가 에너지 부문에서 배출되고 있다"며 "배출 감축 핵심은 전력 부문일 수밖에 없다"고 지적했다.

하지만 전문가들은 정부의 탈원전 정책에 이은 탈석탄 정책은 앞뒤가 맞지 않는 '어불성설'이라고 비판했다. 이덕환 서강대 교수는 "주요 전력 공급원인 원전과 석탄발전을 동시에 배제하는 건 사실상 불가능하다고 본다"며 "24시간 내내 가동할 수 없는 신재생에너지 특성상 여기에만 의존할 수는 없는 만큼 남는 선택은 LNG뿐"이라고 지적했다. 환경부 관계자는 "신재생에너지 가격이 빠르게 떨어지고 있다"고 낙관적인 전망을 내놓았지만 아직 원전이나 석탄발전에 비할 바는 아니다. 현재 태양광 전기는 원전보다 세 배 비싸고, LNG는 원전 보다 두 배 정도 비싸다.

실제로 선진국들은 '온실가스 감축'을 위해 다시 원전을 확대하고 있는 추세다. 국제에너지기구(IEA)에 따르면 선진국에서 원전은 가장 큰 저탄소 전력 공급원이다.

프랑스는 15년 내에 신규 원전 6기 건설을 계획 중인 것으로 알려졌다. 20년 넘게 원전 건설을 중단했던 '원전 종주국' 영국도 2030년까지 원전 12기를 새로 지을 계획이다. 두 나라 모두 '2050년까지 온실가스 총 배출량을 '제로'로 만드는 '네트 제로(net zero)'를 선언했는데, 이 같은 정책 실현의 일환으로 원전을 택한 것이다. 익명을 요구한 에너지 전문가는 "정책의 우선순위를 정확히 할 필요가 있어 보인다"며 "전기로 인상 등 카드도 있지만 과연 이 정부가 쓸 수 있을지 모르겠다"고 꼬집었다.

(1) 질문 만들기

1. 2019년 현재 OECD 국가의 온실가스 배출 순위를 조사해보자.
2. 온실가스 배출 전망치(BAU)는 현행 정책 이외에 추가적인 온실가스 감축 조치를 취하지 않은 경우를 가정한 미래 배출량 전망치이다. 국내 온실가스 배출량 감축을 위한 우리나라 정책의 근거를 양적으로 제시하시오.
3. 친환경 에너지 전환 비율을 조사하자.
4. 우리나라와 G7 국가의 에너지 발전 비율을 조사하고 분석해보자.
5. 에너지의 계량 단위 kW와 kWh를 설명하고, 마력(HP)과의 관계도 조사하시오.

(2) 환경 지식

- 부문별 감축수단으로 친환경 에너지전환, 에너지 수요관리 강화, 신기술 육성·보급, 친환경차 보급 등으로 감축 후 배출량을 574.3백만 톤으로 조정한다.

부문	감축 목표량	주요 감축수단
합계	276.5백만 톤	
전환	57.8백만 톤	<ul style="list-style-type: none"> • 미세먼지 관리 종합대책('17.9), 제8차 전력수급기본계획('17.12) 및 RE 3020 이행계획 등 현 정부 기후·대기·에너지정책 반영(23.7백만 톤) • 에너지세제 개편 및 환경급전 강화 등을 통해 34.1백만 톤 추가감축 추진('20년까지 확정)
산업	98.5백만 톤	<ul style="list-style-type: none"> • 스마트공장 확대 등 에너지 효율화, 우수감축기술 확산 등 생산공정 개선, 제품 고부가가치화 등
건물	64.5백만 톤	<ul style="list-style-type: none"> • 신축건축물 에너지기준 강화, 기존 건축물 그린 리모델링 활성화 등
수송	30.8백만 톤	<ul style="list-style-type: none"> • 전기차 보급 확대(100만대 → 300만대), 친환경 대중교통 확충, 자동차선박항공기 연료효율 개선 등
폐기물	4.5백만 톤	<ul style="list-style-type: none"> • 폐기물발생 소부문에서 감량화와 재활용 강화, 매립 최소화, 메탄가스 포집자원화 등
공공	5.3백만 톤	<ul style="list-style-type: none"> • 공공기관 목표관리제 강화, LED 조명가로등 보급 확대, 재생에너지 시설 확충 등
농축산	1.6백만 톤	<ul style="list-style-type: none"> • 논물관리 감축기술, 양질사료 및 저메탄사료 보급 등
CCUS	10.3백만 톤	<ul style="list-style-type: none"> • 기존 로드맵 감축량 10.3백만 톤을 반영하되, 관계부처 합동운영 결과를 토대로 구체화
기타	3.1백만 톤	<ul style="list-style-type: none"> • 탈루부문 배출량 감소 반영

(3) 데이터 찾기



4 역사 및 문화 분야

1) 양적추론 교과서 저자인 Eric Zaslav 교수가 제안한 Template

1단계 질문 프레임 짜기	직감적인 편견/의견이 있는 질문의 경우 - 편견 배제
	질문을 명확화하기 - 구체적, 수정/해석
	대답을 예상하기 - 일단 예상해 본다.
2단계 모델 만들기	분석 요인은 무엇인가 - 어떤 요인? - 포함/배제
	수집할 데이터 결정 - 어떤 데이터? - 출처는?
	가정을 한다. - 모델링의 전제 - 가정을 열거하기
	모델을 구성한다. - 어떻게 (수식) 만들까?
	오류를 점검한다. - 오류의 원인은? - 오류의 크기는?
3단계 결과 분석	계산을 한다. - 계산 방법 설명 - 결과 산출
	작업 과정을 확인한다. - 점검, 방향을 바꾸어서 - 간편 계산으로
	확신하는지 확인한다. - 신뢰도 - 가능한 양적으로
	결과를 분석한다. - 질적 분석, 의미
	현실성을 체크한다. - 오류를 암시하는가?
	전체 내용을 요약한다. - 단계에 따라 정리

2) 양적추론에서 질문의 중요성 (남북전쟁에서 얼마나 많이 죽었을까?)

- 수준: 고급 (미국 노스웨스턴대학교의 양적추론 교재 활용)
- 사망자 수가 10배이면 전쟁의 충격도 10배일까?
- 어떤 수의 2.4%가 1이면 그 수는 얼마인가?
- 오래전에 죽은 사람의 수를 어떻게 하면 셀 수 있을까?
- 이런 추산이 부정확한 이유는?
- 1860년과 1870년 사이에 인구가 감소했는데, 이것을 전쟁사망자 수로 보아도 될까?
- 1860년 20~24세 사이의 남성 인구수와 1870년 30~34세 남성들의 수와 비교하면?
- 오류의 원인이 너무 많다. 그러면 사망자 수 추정이 쓸데없는가?
- 통계조사에서, 추정값의 신뢰도가 99%라면 믿을 만한가? 95%와 80%는?
- 과소 산정의 의미와 계산
- 전쟁 기간 사망자를 전쟁 탓으로 돌릴 수 있을까?
- 남북전쟁의 사망자는 인구의 0.3%이다. 베트남 전 사망자는 인구의 0.03%이다. 어떤 의미인가? 큰 비율인가?

3) 남북전쟁에서 얼마나 많이 죽었을까?

(1) 연습 문제

- 아래 표는 2012년과 2013년 미국과 캐나다 사이에 오고 간 이주민 데이터이다. "영주권자"는 이웃 나라에서 이주한 신규 영주권자 수를 말한다. 신규 영주권자는 이주한 국가의 전체 인구에 포함된다고 가정한다.
 - 2012년에 캐나다인의 몇 퍼센트가 미국에 이민하였는가?
 - 2013년에 캐나다에 이민한 미국인의 비율은?
 - 국경을 넘나드는 선택이 무작위라고 가정할 때, 2012년에 캐나다로 이주했다가 2013년에 다시 미국으로 이주한 미국인의 비율은 어느 정도인가? 그리고 몇 명인가?

구분		2012	2013
인구	US	314,112,078	316,497,531
	Canada	34,754,312	35,158,304
영주권자	US	20,138	20,489
	Canada	7,891	8,495

(2) 프로젝트 사례

- 손상된 그림을 불완전하지만 디지털로 "복원"하는 과정과 남북전쟁이 아닌 시기의 남성 사망자 수를 추정하는 과정이 어떻게 유사한지 설명하시오. 예를 포함하여 자세히 설명하시오.
- 만약 미국 정부가 노예제도에 대하여 재정적 형태로 배상하기로 한다면, 배상액을 어떻게 달러로 환산할 수 있을까?

(3) 양적추론 교과서 '2장 남북전쟁에서 얼마나 많이 죽었을까?' 관련 뉴스 내용 소개²¹⁾

- BBC뉴스 기사(2012.04.04)
- 누가, 무엇을, 왜: 미국 남북 전쟁에서 얼마나 많은 군인이 사망했습니까?
- 미국 남북 전쟁은 논란의 여지없이 미국 역사상 가장 피비린내 나고 가장 파괴적인 충돌이었고, 정확히 얼마나 많은 사람들이 연합군과 남부군 제복을 입고 사망했는지는 알려지지 않았다. 이제 전쟁 사망자 수에 대한 오랜 추정은 사망자 수를 130,000명까지 줄일 수 있었던 것으로 보인다. 이는 이전 추정치의 21%이며 베트남에서 전체 미국인 사망자의 두 배 이상이다.

21) <https://www.bbc.com/news/magazine-17604991>

- 남북 전쟁은 1861년 북부 자유 주가 지배하는 국가에서 노예 제도가 위협을 받을 것을 두려워한 남부 노예를 소유한 주들이 에이브러햄 링컨 대통령이 당선된 후 미국에서 탈퇴하면서 시작되었다. 1865년 남부 연합군이 북부 연합군에 항복하면서 끝이 났다. 노예제는 그해 헌법 개정으로 공식적으로 폐지되었다.
- 전쟁은 대부분의 전투가 발생한 남부 농업 국가의 경제와 사회를 황폐화시켰고 사망자 수를 직접 집계하는 것이 불가능할 정도로 많은 미국인을 죽였다. 예일대학교의 남북 전쟁 역사가인 David Blight는 "남북 전쟁은 미국인들이 경험하거나 상상한 것 이상의 죽음의 문화, 애도의 문화를 남겼습니다."라고 말했다. "그것은 어떤 서구 사회에서도 전례가 없는 정도의 가족과 사회적 황폐를 남겼다."
- 1860년대에 미국 정부와 남부 연합(남부 주에서 분리주의 단체를 지칭하는 이름)은 조잡한 기록 보관자였다. 그들은 출생과 사망을 등록하는 포괄적인 시스템이 없었고, 군대 소집 명부는 사망자를 기록하는 것보다 군대의 힘을 표로 만드는 데 더 많이 사용되었다. 그리고 미국 남북 전쟁에서 모든 전쟁과 마찬가지로 버려지거나 탈영한 사람들은 시신이 진흙 속으로 영원히 가라앉거나 산산조각이 나거나 잘못 식별되었으며, 처음에는 부상당한 것으로 표시된 군대가 부상으로 사망했다.
- 남부군의 기록은 전쟁의 마지막 단계에서 북부군이 수도 버지니아주 리치먼드를 점령했을 때 대부분 파괴되었다. 한 세기가 넘는 기간 동안 약 620,000명의 미국인이 전쟁에서 사망했으며 그중 절반 이상이 질병이나 굶아 터진 상처로 전장에서 사망했다는 사실이 받아들여졌다. 그러나 역사가들은 그 숫자가 사망자 수를 과소 산정했다고 감지했다. 또한 어떤 역사가도 새로운 계산을 고안하고 실행하는 엄청난 작업을 수행하지 않았다.
- 드디어 역사가 J David Hacker 교수가 1850년부터 1880년까지 새로 디지털화된 미국 인구 조사 기록을 연구하기 위해 인구 통계학적 방법과 정교한 통계 소프트웨어를 사용한 논문을 12월 발표하였다. 그의 발견: 전쟁에서 약 750,000명의 군인이 사망했는데, 이는 19세기 추정치보다 21% 높은 수치이다.
- 해커 교수는 "우리는 이미 전쟁이 파괴적이라는 것을 알고 있었다"고 말했다. "어떤 의미에서 그 총계를 20% 정도 늘리는 것은 그 이야기를 바꾸지 않는다. 다른 한편으로 저는 인구통계학적 역사가이고, 그리고 우리는 전쟁의 영향이 무엇이었는지 우리가 할 수 있는 가장 정확한 일을 할 필요가 있다."



앤티텀 전투 이후 약 23,000명의 군인이 사망, 부상 또는 실종되어 1862년 9월 17일을 미국 역사상 가장 피의 날로 만들었다.

(4) 기사 내용 중 논문 링크

- J. David Hacker (2011), *Census-Based Count of the Civil War Dead*, The Kent State University Press, *Civil War History*, 57(4).²²⁾
- 논문초록
- J. David Hacker의 "인구조사 기반 남북전쟁 사망자 수"의 12월호 특집 기사에서는 620,000명이라는 한 세기 전의 추정치가 너무 낮다고 주장한다. Hacker는 1850-1880년 인구 조사의 새로운 국가 표본과 인구 조사 기반 사망률 추정 방법을 사용하여 추정되는 합계가 대략 750,000명이라고 주장한다. 이 논문은 전쟁 중 죽음과 죽음에 대한 Drew Gilpin Faust의 작업이 "남북 전쟁을 이해하는 데 얼마나 오래되고 얼마나 적게 분석된 수치가 얼마나 중요한지 보여주는 것이 가장 중요하다"는 Mark Neely의 최근 주장에 대한 직접적인 답변입니다. "우리는 '해야 할 일' 목록에 추가할 수 있다."라고 저자는 제안한다.
- J. David Hacker 는 SUNY의 Binghamton University 역사학과 부교수이다. 그의 연구는 1940년 이전 미국의 인구 통계학적 역사에 초점을 맞추고 있다. 그는 사망률의 경향과 결정 요인, 초혼의 경제 및 인체 측정적 상관 관계, 장기적인 출산율 감소의 시작, 출산율에 대한 부모의 종교의 영향, 그리고 남북 전쟁이 남부 결혼 패턴에 미치는 영향을 연구한다.

22) <https://www.kentstateuniversitypress.com/2011/volume-57-no-4-december-2011/>

4) 한국전쟁에서 얼마나 많이 죽었을까?

(1) 한국전쟁 사망자 수: 국방부 자료: 국가 기록원 나라기록 컬렉션²³⁾

6.25전쟁
국가기록원

도움말
6.25전쟁 개요
6.25전쟁 단계별 개관
6.25전쟁 더보기
주요 기록물 소개

**6.25전쟁
더보기**

- 6.25전쟁 연표
- 전선의 변화
- 유엔 참전국
- 전쟁 속의 통계
- 피해 현황 통계
- UN군 관련 통계
- 주요 작전명령

홈 > 6.25전쟁 더보기 > 전쟁 속의 통계 > 피해 현황 통계

피해 현황 통계

(1) 한국군 및 유엔군 인명 피해 (단위: 명)

구분	계	전사	부상	실종/포로
계	772,608	175,801	554,202	42,605
한국군	621,479	137,899	450,742	32,838
유엔군	151,129	37,902	103,460	9,767

출처: 국방부 군사편찬연구소, <통계로 본 6.25전쟁>, 2014, p.30

(2) 육·해·공군 전/사망·실종자·부상자 현황 (단위: 명)

구분	계	육군	해군(해병포함)	공군
계	613,136	579,492	9,011	138
전/사망	137,899	135,858	1,903	138
실종자	24,495	-	-	-
부상자	450,742	443,634	7,108	-

출처: 국방부 군사편찬연구소, <통계로 본 6.25전쟁>, 2014, p.200

(3) 북한군 인명 피해 (단위: 명)

출처문헌	총계	사망	실종/포로	비전투손실	비고
한국전쟁 4년지	607,396	508,797	98,599	-	-
군사정전위 편람	640,000	520,000	120,000	-	-
미군자료	801,000	522,000	102,000	177,000	사망에 부상포함

출처: 국방부 군사편찬연구소, <통계로 본 6.25전쟁>, 2014, p.449

(2) 전쟁포로 및 전투 중 행방불명자 업데이트 The Graybeards지 Marry O'Brien 기고문

- 한국전 기간에 54,000명 이상이 한국에서 숨졌다고 하는데, 이는 사실과는 전혀 다르다. 국방부의 기록에 따르면, 한국전에서 미군 사망자 수는 36,574명 (적군에 의한 사망 33,741, 비 적군에 의한 사망 2,833)이며, 이 기간에 세계 각지에서 총 54,246명의 미군이 사망했다.

(3) 한국전 참전용사회²⁴⁾

- 미 국방부가 하와이 소재 중앙 군사 검증 연구소와 협력하여 연구한 자료 제공

23) <https://theme.archives.go.kr/next/625/damageStatistic.do>

24) www.kwva.org

(4) 국제신문 자료(2018년 6월 25일)²⁵⁾

“6.25 전쟁 중 사망자 수 137만...민간인 사망자 52만여 명”

1950년 6월 25일에 시작돼 1953년 7월 27일까지 지속된 전쟁에서 사망한 사람은 137만 4,195명에 이른다. 우선 국군이 전쟁 중 13만 7,899명이 전사했다. 이 중 13만 5,858명은 육군에서 발생한 사망자이며 해군 1,903명, 공군 138명이 전사했다. 전쟁 당시 한국 경찰은 3,131명이 사망한 것으로 공식 집계됐다. 군사정전위원회 편람에 따르면 북한군 사망자 수는 52만 명에 달하는 것으로 알려졌다.

남한과 북한뿐만 아니라 외국 군대도 적지 않은 인명피해를 기록했다. 남한과 함께 북한과 맞서 싸운 유엔군 사망자 수는 3만 7,902명에 달한다. 이중 3만 3,668명이 미군에서 발생했다. 북한과 함께 유엔군과 맞붙었던 중공군에서는 14만 8,600명의 사망자가 발생했다. 남북한 군인과 외국 군인들의 피해도 컸지만 전쟁의 한 가운데 놓였던 민간인 피해도 적지 않았다. 남한에서 민간인 24만 4,663명이 사망했다. 북한에서는 28만 2,000명의 민간인이 전쟁으로 죽었다.

이에 지금까지 집계된 공식 통계에 따르면 한국 전쟁으로 사망한 수는 약 137만여 명이다. 한편 통계에 잡히지 않은 이들이 있을 수밖에 없으며 그들이 포함될 경우 사망자 수는 보다 늘어날 것으로 보인다.

(5) CIA 워싱턴 본부 자료

한국전 사상자 일람

2004년 6월 15일 현재

희생자 구분	합계	육군	공군	해병대	해군
전투 중 사망	23,615	19,715	209	3,320	371
부상으로 사망	2,460	1,887	14	532	27
전투 중 실종 중-사망으로 신고	4,817	3,337	991	386	103
포로로 사망	2,849	2,792	24	29	4
적군에 의한 사망 합계	33,741	27,731	1,238	4,267	505
실종 중-사망으로 추정	8	4	4		
기타 사망	2,825	2,121	310	242	152
적군으로 인한 사망 외 합계	2,833	2,125	314	242	152
한반도내 전투 중 사망 합계	36,574	29,856	1,552	4,509	657
한반도외 지역 사망 합계	17,672	7,277	5,532	1,019	3,844
총 합 계	54,246	37,133	7,084	5,528	4,501
전투 중 사망-유해 없음	1,533	1,081	49	255	148
부상으로 사망-유해 없음	22	22			

25) <http://www.kookje.co.kr/news2011/asp/newsbody.asp?code=0300&key=20180625.99099012267>

전투 중 실종-사망으로 신고-유해 없음	4,578	3,302	809	373	94
포로로 사망-유해 없음	1,901	1,860	13	25	3
기타 실종-사망으로 추정-유해 없음	8	4	4		
기타(적군에 의하지 않은) 사망-유해 없음	84	5	37	6	36
유해 없는 사망 합계	8,126	6,274	912	659	281
치명적이지 않은 부상	103,284	77,596	368	23,744	1,576
전 세계 한국전 기간 중 복무 군인 수**	5,720,000	2,834,000	1,285,000	424,000	1,177,000
한반도 및 인근지역 복무 군인 수**	1,789,000	1,153,000	241,000	130,000	265,000

VI

결론



VI. 결론

- 우리나라 대학의 교양기초교육은 전반적으로 시대적 요구를 반영하고자 노력해왔고 교육부의 ACE 사업, 대학기본역량진단사업 등을 통해서 개선되었다. 그럼에도 박진희 등(2017)의 연구에 따르면 조사대상의 56% 대학만이 비이공계 학생들에게 3학점 정도의 교양과학 교과목 이수를 의무화하고 있으며, 그 내용을 살펴보면 흥미를 유발하기 위한 교과목이나 과학기술과 사회의 관계 이해 증진을 위한 STS 교과목이 대부분이다.¹⁾
- 황인아 외(2020)의 연구에 따르면, 대학의 교양수학은 전공과목 이수를 위한 전공기초과목 성격을 가지는 ‘기초교양수학’과 교양으로서 ‘순수교양수학’으로 구분하고 있다. 대부분의 대학에서는 상계열과 이공계열 전공을 위한 기초교양수학을 개설하고 있으며, 다양한 전공 배경을 가진 학생들의 수학적 안목을 위해 순수교양수학을 개설하고 있다.²⁾ 그러나 순수교양수학의 역할은 학문탐구를 위한 보편적 문해능력과 비판적 사고능력, 그리고 양적으로 의사소통할 수 있는 능력을 함양하도록 교수와 학습이 이루어져야 한다.
- 대학이 고등학교와 별반 다를 바 없는 내용과 방법으로 신입생들에게 교양 수학이나 과학을 가르치거나, 심지어 수학이나 과학이라고 보기 어려운 내용을 교양으로 가르친다면, 아니면 수학이나 과학을 수강하지 않고 졸업할 수 있는 교육과정이라면 어떨까. 대학은 문·이과 구분 없이 모든 학생들이 학문수행을 하는데 공통적으로 요구되며, 학사과정 이후의 활동에서도 지속적으로 활용하게 될 지적이고 실용적인 능력을 함양할 있는 기회를 제공해야 한다.
- 바야흐로 지식의 시대는 저물고 통찰이 시대가 왔다. 지식의 양이 아니라 생각의 힘, 시대의 흐름을 읽고 중요한 질문을 하며 필요할 때 답을 찾을 수 있는 능력이 미래의 경쟁력이다³⁾. 교양교육은 사회가 요구하는 변화를 교육과정과 평가방식을 통해서 반영해야 한다. 팩트풀니스(Factfulness)의 저자 한스 로슬링(Hans Rosling) 박사는 사실(데이터)에 근거해 세계를 바라보고 예측하고 데이터의 시각화를 통해서 관계를 인식하는 방법으로 대중을 확실하게 설득하였다. 이처럼 어떤 개념을 ‘양적 언어’로 표현하는 것은 매우 유용하다. 따라서 양적 표현에 대한 친숙함과 편안함은 사회를 이해하고 참여하는 데에 필수적인 핵심역량이다.

1) 박진희, 강운재, 손향구, 이관수, (2017). *대학 교양 과학교육의 범위와 과제*, 한국교양기초교육원 보고서, RR-2017-9-655호.
 2) 황인아 김인경(2020). “교양적 소양(Cultivated Literacy)을 기르기 위한 수학적 추론’ 교과목 개발에 대한 연구”. *교양교육연구*, 14(6), 161-173
 3) 박형주(2018), *생각연습과 수학교육*, 125회 한림원탁토론회(주제: 4차 산업혁명시대 대한민국의 수학교육, 이대로 좋은가?), 한국과학기술한림원.

- 미국의 대학들은 핵심교양을 통해서 학생들에게 지적이며 실용적 능력을 개발하고자 비판적 사고력 함양에 주력하고 있다. 미국 대학의 대표적인 핵심교양은 글쓰기와 양적추론이다. 반면에 우리나라 대학은 국어와 영어 중심의 의사소통교육을 교양필수로 두고 있다. 모든 학생들이 개인의 삶에서, 직장에서, 사회에서 필요로 하는 필수 지식과 능력을 갖출 수 있도록 우리의 대학도 양적추론을 제공해야 한다.
- 한국교양기초교육원은 2021년 진행된 교양기초교육 교·강사 연수 프로그램을 통해서 전국에 있는 교·강사를 대상으로 양적추론을 소개하였고 긍정적인 평가를 받았다. 이 때 개설된 강좌는 ‘양적추론I: 개념과 내용’과 ‘양적추론II: 과제수행사례’이며, 이 강좌를 통해서 문·이과 전공과 관계없이 모든 학생들을 위한 교양의 기초교육으로서 양적추론의 필요성을 전국의 교·강사들에게 알리게 되었다.
- 한국교양기초교육원은 대학의 교양기초교육으로 양적추론 프로그램을 확산하는 데 필요한 학습자료를 개발하기 위하여 교기원 산하 교양교육정책개발위원회에 양적추론 태스크포스(TF)를 구성하였다. TF 구성원은 경제학, 수학, 물리학, 생물학, 식품영양학을 전공한 교수진이며, 양적추론 학습자료를 개발하기 위해서 3가지 목표를 세웠다.
- 우선 양적추론 학습자료를 개발하기 위해서 단기 집중 과정을 통해서 위원별로 1개 이상의 주제를 개발한다. 둘째, 모든 학생들이 양적추론 능력을 개발할 수 있도록 학습자료를 초급, 중급, 고급 3가지 수준별로 나누어 개발한다. 마지막으로 경제 및 사회 분야, 과학 및 응용 분야, 보건 및 환경 분야, 역사 및 문화 분야 등 4개 분야별로 학습자료를 개발한다.
- 목표 달성을 위해서 TF 구성원은 양적추론의 개념과 방법을 공유하고, 핵심주제를 중심으로 서로의 의견을 교류하였다. 양적추론 학습으로 적절한 주제를 선별하고, 분야별 수준별로 양적추론 학습자료를 개발하면서, 다양한 학문 분야에서 수준별로 양적추론 학습자료 개발이 가능하다는 결론을 내렸다.
- 양적추론은 이공계뿐 아니라 사회과학 등 여러 전공분야의 교수진도 개발할 수 있으므로 대학의 지원이 뒷받침된다면 학교의 특성이나 학과의 특성을 반영한 다양한 양적추론 프로그램 개발이 충분히 가능하다.



부록-단위

1. 길이

1) m

- SI 단위(=미터법)의 대표적인 거리의 단위. 약자로 쓰는 경우가 많은데, m으로 표기한다. 소문자로 표기함이 원칙이다.
- 첫 미터의 정의는 북극에서 적도까지 자오선 호 길이의 1천만분의 1이었다. 뵘케르크(가장 북쪽에 있는 파란색 표시)에서 바르셀로나까지, 경로의 대부분이 프랑스 영토 남북을 가로지르는 두 지역을 기준으로 떨어진 거리와 위도 차를 측정하고 자오선의 길이를 유추하였다.
- metre 혹은 meter. 국제표준표기는 metre지만 미국식 영어에서는 meter라고 쓴다. 진공 중에서 빛이 1/299,792,458초 동안 나아간 길이와 같다.

2) AU, 광년(ly), 파섹

- 1 AU(천문단위)는 태양에서 지구까지의 평균거리로, 1억5천만 km이다.
- 1광년은 빛이 진공에서 1년(365.25일)동안 진행하는 거리의 단위로, 약 9조4600억 km이다. 1광년은 약 6만3천 AU이다.
- pc(파섹) ; 천체의 거리를 측정할 때 사용하는 방법 중 하나인 연주시차에서 시차가 1"가 될 때의 거리를 기준으로 한 단위이다. 1pc은 약 3광년이며, 20만 AU, 또는 30조9천억 m다.

3) 넓이, 부피

- 넓이와 부피는 길이의 유도 단위이다. 국제단위계의 유도 단위 (derived unit)는 국제단위계의 일곱 개 기본 단위를 조합해 만들어진 단위이다. 조합 단위 또는 도출 단위라고 부르기도 한다.
- 넓이는 직사각형을 기본으로 하여 가로와 세로의 곱으로 나타낸다.

$$\bullet 1 m^2 = 1m \times 1m$$

$$\bullet 1 a = 1 are = 1아르 = 10 m \times 10 m = 100 m^2$$

$$\bullet 1 ha = 1 hectare = 100 m \times 100 m = 100 a = 1만 m^2$$

- $1\text{ km}^2 = 1\text{ km} \times 1\text{ km} = 1,000\text{ m} \times 1,000\text{ m} = 100\text{만 } m^2$
- 부피는 입방체를 기준으로, 가로, 세로, 높이의 곱으로 나타낸다.
 - 세제곱미터 $m^3 = m \times m \times m$
 - 리터 $L = 10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 10\text{cm}$. 1901~1964년의 리터 정의는 '1기압의 압력에서 최대 밀도를 얻을 수 있는 온도에서 1kg인 물의 부피'이었는데, 측정하기에 지나치게 까다로워 본래의 정의로 돌아갔다.
 - 시시 $cc = 1\text{cm} \times 1\text{cm} \times 1\text{cm}$. 생활 속에서 사용하기에 적당한 부피이지만 국제규격은 아니다.

2. 무게

- 킬로그램 kg ; 1791년, 프랑스가 1kg을 물의 밀도가 가장 높은 온도 4°C 인 물 1 L(1000 cm^3)의 무게로 정의했다.
- 2018년 26회 세계 도량형 총회의 결정을 거쳐 2019년부터는 자연법칙으로부터 도출되는 불변의 상수인 플랑크 상수를 기반으로 새 kg 정의를 채택하였다. 플랑크 상수(기호 h)는 $6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 이다.

3. 시간(초, 분, 시)

- 초는 1일을 24등분(시)하여 그것을 60등분(분)한 것을 다시 60등분 한 것이다. 실제로 어느 시가까지 「1초」는 1일(정확히는 평균 태양일)의 86,400분의 1로 정의되어 있었다.
- 초(秒, 기호 s)는 시간의 단위로, 국제단위계의 기본단위 중 하나이다. 절대 영도에서 세슘-133 원자의 바닥 상태 ($6S_{1/2}$)에 있는 두 개의 초미세 에너지준위 ($F=4$, $F=3$)의 주파수 차이를 9,192,631,770 Hz 로 정의하고 그 역수를 통해 초를 정의하고 있다.
- 세슘 133이라는 원자에 어떤 특정 주파수의 전파를 쬐면 세슘 원자가 바닥상태에서 들뜬 상태로 변하게 되는데 이 특정 전파의 진동수를 세고 그 진동수가 9,192,631,770가 되면 1초로 하는 것이다. 영국의 물리학자 루이 에센(1908~1997)이 1955년에 처음 이론을 냈다. 1초는 1/60 분이고 1 초은 1/3600 시간, 1/86400 일이다.
- hour(시)는 그리스어의 hora(시간)에서 유래했다. minute(분)은 「작다」는 의미의 라틴어 minutus가 어원이다. 「미니」나 「마이너스」등도 같은 어원을 가지고 있다. second에는 「제2의」라는 의미가 있다. 우선 hour를 분할한 minute, 그것을 또 분할한(그러므로 제2분할) second(초)라는 뜻이다.

4. 데시벨(dB)

- 데시벨은 2개의 양을 비교하여 그것이 몇 배나 다른지를 로그를 사용해서 표시하는 상대적인 표시 방법이다.
- 데시벨에서는 10배의 차이를 20dB의 차로 나타내는 구조로 되어 있다.
- 음압(음의 진동의 세기)의 경우, 인간의 귀로 아슬아슬하게 들을 수 있는 음압을 기준으로 하여 0데시벨로 한다. 이 음압보다도 10배 큰 음압이 20데시벨, 거기서 10배가 더 큰 음압이 40데시벨로 표시한다.
- 데시벨은 벨[B]이라는 단위에 10분의 1을 나타내는 접두사 「데시d」가 붙어 있다. 단위명은 영국의 발명가 A.G. 벨(1847~1922년)의 이름에서 따온 것이다. 벨[B]의 경우는 10배의 차이를 2벨로 표시한다.

5. rpm

- 분당 회전수로 Revolution per minute 또는 rotation per minute의 약자이다.
- 참고로 대강의 LP판의 회전속도는 33.1/3rpm(3분간 딱 100회전)이다.
- 회전하는 횟수가 아니라 회전하는 각도의 크기로 속도를 표시할 수 있다. 이것은 「각속도라고 불린다. 각의 크기를 라디안[rad](1라디안은 약 57.2°이다. P.76)으로 표시하여 단위시간을 1초로 하면 라디안 매 초(radian per second) 「rad/s」라는 단위가 된다. 느릿느릿한 회전을 나타내는 데 편리한 단위이다.
- CD의 경우 회전속도는 일정하지 않다. 안쪽을 재생할 때는 빠르고 (약 500rpm), 바깥쪽은 느려(약 200rpm)지도록 설계되어 있다. 이에 따라 헤드가 기록 면을 읽는 속도 (선속도)가 항상 일정(약1.25m/s)하게 유지되고 있다.

6. 헤르츠(Hz)

- 진동, 파동, 원운동 등과 같이 일정한 시간간격으로 반복되는 같은 상태를 나타내는 현상을 「주기현상」, 반복되는 시간간격을 「주기」라고 한다.
- 주파수(진동수)는 주기의 역수로, 단위시간에 주기현상이 반복되는 횟수이다. 헤르츠「Hz」의 경우는 1초간 몇 회 반복되었는지를 나타낸다.
- 전화기가 전송할 수 있는 음성은 사람의 대화를 커버하는 데는 충분하다고 생각해서 300~3400Hz로 정해져 있다. 한편 방울벌레의 울음소리의 주파수는 약 4500Hz. 다시 말해 방울벌레의 합창은 사람이 들을 수는 있어도 전화로는 전할 수 없다.

7. 속도, 가속도

- 속도는 「단위시간 당 움직인 거리의 변화율」
- 음악의 속도 기호에 「안단테 Andante」가 있다. 「걸는 듯한 속도로」라는 의미이다.
- 1시간에 4km 걷는 속도(=4km/h)라고 정의해버리면, 천천히 걷는 속도를 0.8안단테, 빠른 걸음을 1.5안단테라고 표시할 수 있다.
- 속도의 단위에 고유의 명칭을 부여하는 예로 카인[kine]이 있다. 1카인은 1초에 1cm라는 느릿느릿한 속도이다.
- 가속도는 「단위시간 당 속도의 변화율」이므로 속도의 변화분을 그만큼 걸리는 시간으로 나누어 구한다. 국제단위계에서의 단위는 「m/s²」이다.
- 속도를 올릴 때의 가속도는 양수, 속도를 떨어트릴 때의 가속도는 음수가 된다. 일정한 속도로 달리고 있는 전철의 가속도는 0이다.

8. 온도, 힘, 에너지

1) 온도

- 섭씨 [°C] ; 셀시우스는 처음에는 1기압 하에서 물의 끓는 점을 0°C로 삼았다. 지금과는 반대이다. 나중에 물의 어는점을 0°C, 끓는점을 100°C로 하는 현재의 방식으로 고쳤다.
- 현재의 섭씨온도는 국제단위계의 온도의 기본단위인 켈빈[K]을 사용해 정의되어 있다.
- 화씨 [°F] ; 파렌하이트는 1717년, 수은을 사용해서 정확한 온도계를 제작했다. 이 온도계로 측정하자 물의 어는점과 끓는점이 일정하다는 점을 알게 되었다. 이것은 대발견이었다.
- 물의 어는점과 끓는점 사이를 180등분(섭씨온도계로는 100등분)하여 어는 점을 32°F, 끓는 점을 212°F로 하는 눈금을 사용한다.
- 화씨 100도는 섭씨 37.5도에 해당한다. 화씨온도를 사용하는 지역에서는 조금 열이 났을 때의 체온이 100°F라고 인식하고 있다.
- 켈빈 [K] ; 국제단위계의 온도의 기본단위. 절대영도의 사고방식을 도입한 영국의 물리학자 W.톰슨(후에 남작 켈빈경)을 따라붙었다. 온도의 단위이지만, 기호에는 「°」가 붙지 않는다.
- 모든 분자의 운동이 정지되는 온도(절대영도)를 0K(켈빈)으로 정하고 켈빈에 1도의 온도차에 셀시우스도와 같은 간격을 이용한다. 켈빈에서는 음수를 사용하지 않는다.
- 절대영도 0K는 -273.15°C이므로 섭씨온도의 0°C는 273.15K가 된다.

2) 힘(뉴턴N)

- 질량의 단위는 [kg], 가속도의 단위는 [m/s²], 힘의 단위는 [kg·m/s²]이다.
- 뉴턴은 힘의 단위로 1N = 1kg·m/s²이다.
- 상당히 긴 단위이기 때문에 하나로 묶어서 뉴턴[N]이라고 하는 특별한 명칭과 기호가 부여되었다. 물론 영국의 과학자 아이작 뉴턴(1642~1727년)의 이름에서 유래했다.
- 힘 F는 물체의 질량 m과 가속도 a의 곱으로 정의되어 있다. 다시 말해 F=ma라는 식으로 나타낼 수 있다.

3) 압력(파스칼)

- 국제단위계의 힘의 단위는 뉴턴(N), 면적의 단위는 제곱미터[m²]이니 압력의 단위는 [N/m²]이다.
- 압력은 압력 = (힘의 크기) ÷ (힘이 작용하는 면적)으로 구할 수 있다.
- [N/m²] 그대로 뒤도 좋지만, 편리하게 표시하기 위해서 여기에 [파스칼 pascal]이라는 명칭과 [Pa]라고 하는 기호가 부여되었다.
- 1Pa = 1N/m²
- 파스칼이라는 명칭은 물론 대기압의 존재를 실증한 프랑스의 화학자 파스칼(1623~1662년)에서 유래했다.
- 해수면에 대한 기압을 「표준기압」으로 삼아 이것이 「1기압」으로 정의되어 있다. 「기압」도 하나의 단위이다. 「1기압」을 파스칼로 나타내면 1013.25Pa = 10332mmAq(물의 압력)이다.

4) 에너지(줄 J)

- 국제단위계의 에너지와 일의 단위
- 지면에 놓여있는 짐은 그 질량과 중력가속도의 곱으로 같은 힘(중력)으로 지면에 달라붙어 있다. 이 짐을 들어올리기 위한 힘이다.
- 일, 에너지의 단위는 줄[J]이다. 영국의 물리학자, 제임스 프레스캣 줄(1818~1889년)에서 유래했다.
- 「일」의 크기는 「힘」과 「거리」의 곱으로 구하기 때문에 [J]는 [N·m], [kg·m²/s²]이다.
- 또한 1W와 1s(초)의 곱, 여기에 1C와 1V의 곱도 1J이 된다.

5) 일률(와트W, 마력HP)

- 일률은 단위시간 동안 어느 정도의 「일」이 가능한지를 나타낸다.

- 국제단위계의 일의 단위는 줄[J], 시간의 단위는 초[s]이니 일률의 단위는 $[J/s] = [W]$ 이다.
- 증기기관의 개량으로 유명한 영국의 기술자·발명가 제임스 와트(1736~1819년)는 증기기관의 능력을 말의 능력과 비교하는 것을 생각해냈다.
- 와트는 말이 단속적으로 짐을 끌 때의 일률에서 「1마력」을 산출해냈다. 구체적으로는 「1초간에 550중량 파운드의 중량을 1피트 움직일 때의 일률」로 이것이 영국 마력[HP]이다.
- 이것과는 별도로 미터법을 이용한 프랑스 마력[PS]가 있다. 양쪽 모두 국제단위계의 단위는 아니지만, 일본에서는 특수용도에 한정하여 프랑스의 마력의 사용이 법적으로 인정받고 있다.
- 영국 마력 1HP = 745.7W, 프랑스 마력 1PS = 735.5W
- 인간의 「마력」은 0.2~0.3마력 정도이며, 우주소년 아톰은 10만 마력이라고 한다.
- 와트는 전력의 단위로서도 사용된다. 위에 각종 가전제품의 소비전력을 소개하고 있다.

6) 진도

- 지진의 강약의 정도를 나타내는 척도
- 지진 규모(Seismic magnitude scales)는 지진의 절대적인 크기를 표시하는 체계이다. 진도와 달리 거리에 변하지 않는다. 지진의 실제 크기(에너지, 진폭 등)에 로그 스케일(logarithmic scale)의 눈금을 가진다. 저규모 지진은 리터 규모가, 고규모 지진은 모멘트 규모가 흔히 쓰인다. 일본은 일본 기상청 규모를 쓴다.
- 가장 잘 알려진 지진계급은 1935년에 미국의 지진학자인 리히터가 개발한 리히터규모 계급이다. 리히터규모 1의 차이는 에너지 차이가 32배임을 뜻한다. 예를 들면, 리히터규모가 7.0인 지진은 리히터규모가 6.0인 지진에 비해 32배나 많은 에너지를 만든다. 리히터규모가 2.0 이하인 지진은 감지기로만 감지할 수 있을 정도로 약하고, 리히터규모가 7.0보다 큰 지진은 많은 건물을 파괴한다.
- 리히터규모가 1만큼 작아지면, 지진이 일어나는 횟수는 약 10배 정도 많아진다. 예를 들면, 리히터규모가 6.0인 지진은 리히터규모가 7.0인 지진보다 10배 정도 자주 일어난다.

9. 전기, 자기,

1) 암페어(전기 A)

- 전기의 표준 기본단위로, 암페어 [A]는 미터 [m]나 킬로그램[kg]과 마찬가지로 일곱 가지의 국제단위계의 기본단위 중 하나이다.
- 전자가 이동하는 상황을 일반적으로 「전기가 흐른다」라고 하고, 그 양을 수치로 나타내는 것이 「전류」이다.

- 국제단위계에서는 시간의 단위에 기본단위로 초[s]를 사용한다. 따라서 「전류」란 어떤 단면을 1초간 통과하는 전기량(전하)이다.

2) 전압(볼트 V)

- 전류를 흐르게 하는 힘으로 전압이라고 하며, 단위는 볼트 [V]이다. 이탈리아의 물리학자 볼타(1745~1827년)에서 유래했다.
- 전력 P와 전압 E, 전류 I의 사이에는 $P = E \times I$ 의 관계가 있다.
- 미국, 일본에는 가정용 전압은 통상 100V이고, 한국은 220V이다.
- 난방을 위해서 1500W의 석유 히터를 사용하면 흐르는 전류는 $1500W \div 220V = 6.8A$ 이다.

3) 자력, 자속(위베 Wb, 테슬라 T)

- 자력은 N극에서 S극을 향하는 가상의 선(자력선)으로 표현된다. 이 자력선의 묶음이 「자속」이다.
- 자속의 강도를 나타내는 것이 자속의 단위 웨버(Wb)이다. 단위명은 독일의 물리학자 웨버(1804~1891년)에서 유래했다.
- 자속 밀도(자기장)에 대한 유도단위로 SI 단위이다.
- 자기장의 밀도로 정의된다. 테슬라는 면적당 웨버로 1960년 정의되었다.[1] 발명가이자 과학자이고 전기 공학자인 니콜라 테슬라의 이름을 따서,
- 코일(철사 같은 가느다란 것을 감은 것)에 자석을 가까이 대었다 멀리 떼었다 해보면 코일에 전압이 발생한다(자석유도). 웨버는 이 현상을 사용해 정의한다.

10. 빛, 소리

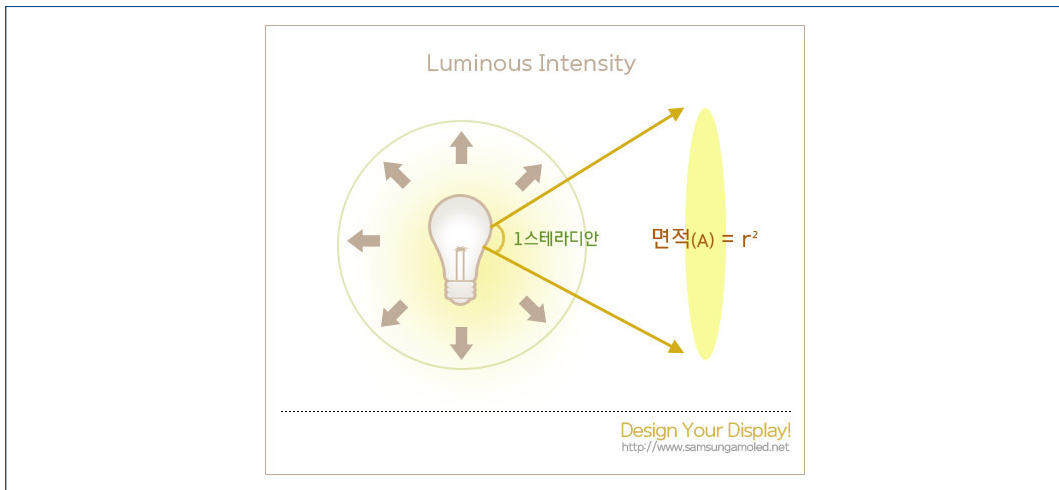
1) 칸델라(candela, cd)¹⁾

- 광도(빛의 세기)를 나타내는 SI 기본단위
- 빛을 발하는 물체를 「광원」이라고 부른다. 이 광원에서 어떤 방향을 향하는 빛의 세기를 「광도」라고 한다.
- 현재 국제단위계 SI의 광도의 단위는 칸델라(cd)이다. 1960년에 SI 기본단위의 일원이 되었다.
- 「칸델라」는 「양초, 캔들」라는 의미의 라틴어에서 유래했다.
- 광도(Luminous Intensity)는 빛의 방향에 수직인 면을 통과하는 빛의 양을 말하는 것으로 단위면적을 일정 시간동안 통과하는 광속의 크기에 따라 광도를 결정한다.

1) <https://news.samsungdisplay.com/7846/>

- 광도의 단위는 칸델라(cd)로 1스테라디안 당 나오는 빛의 세기를 의미한다.

※ 스테라디안(steradian 또는 square radian)은 라디안처럼 무차원상수이다. 2차원에서의 각은 라디안, 3차원의 입체각은 스테라디안이라 한다. 원에서 360도는 2π 라디안이고 구 전체의 입체각은 4π 스테라디안이다. 1 라디안은 약 57도이다. 1 스테라디안은 반지름이 r 인 구의 표면에서 r^2 인 면적(구면위의 넓이)에 해당하는 입체각이다. 구의 표면적이 $4\pi r^2$ 이므로, 정의에 의해 구는 4π 스테라디안이다.



- 촛불을 켜 놓으면 사방으로 빛이 퍼져간다. 이렇게 퍼져나간 전체 빛을 루멘(lm)으로 표현한다면 그 중 1 스테라디안당 발생하는 빛의 밝기를 칸델라(cd)로 표현할 수 있다.

- 광속이 100 루멘(lm)인 전구가 모든 방향으로 빛을 낼 때 광도는 다음과 같다.²⁾

$$100 \text{ lm} / 4\pi = 7.96 \text{ cd}$$

- 빛을 내는 전구가 있을 때, 전구 전체에서 내는 모든 빛이 광속이다. 전구의 특정 방향에서 나가는 빛의 세기가 광도이다

- 360도 모든 방향으로 빛을 내는 전구와 한 방향으로만 빛을 내는 전구가 있을 때 두 전구의 광속(루멘)이 같다면 한 방향으로만 빛을 내는 전구가 더 강한 광도(칸델라)를 가진다.

- 일본은 영국에서도 사용하던 「축」이라는 단위를 사용한다(한국도 예전에 사용했다). 「양초 1개 분량의 광도」에서 유래한 단위이다. 「축」은 백열전구의 광도를 나타내는 데 사용되었다.

- 1칸델라는 1축에 해당하는 단위이다. 1칸델라는 예전 얇은 양초 1개분의 광도이다.

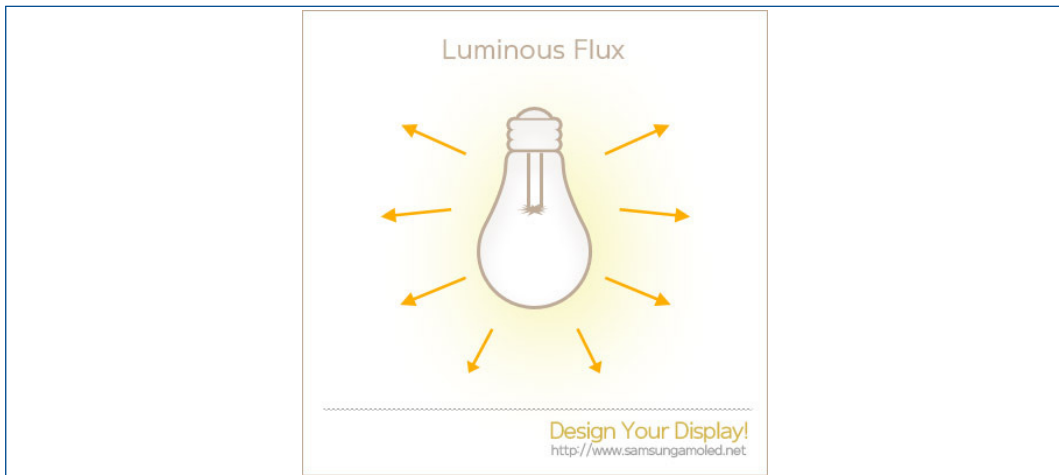
- 1979년에, 540×10^{12} Hz인 단색광을 방출하는 광원의 복사도가 어떤 방향으로, 1 스테리안 당 1683W일 때 이 방향에 대한 광도라고 정의하였다.

2) <https://gammabeta.tistory.com/2498>

- 이 단색광은 인간의 눈의 감도가 최대가 되는 주파수(파장은 약 550nm)이다.

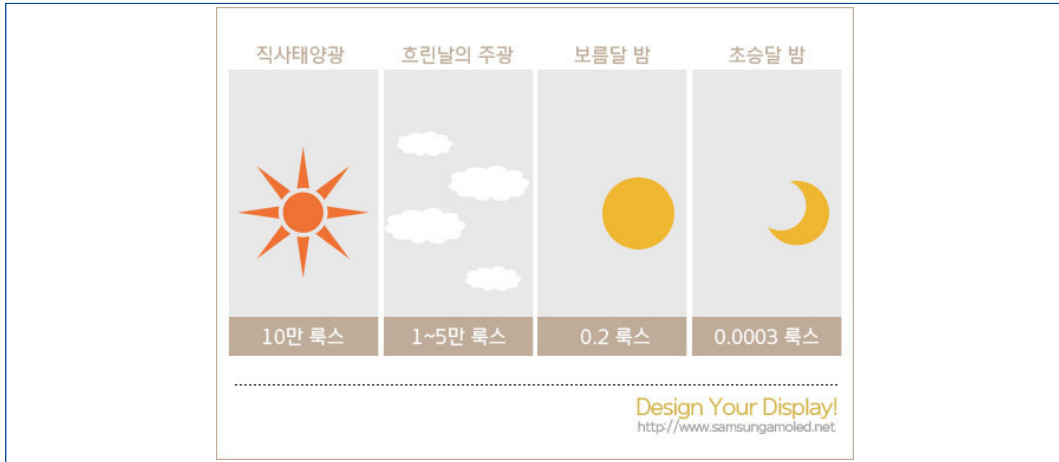
2) 루멘(lumen, lm)

- 1루멘은 1칸델라의 광도를 갖는 광원에서 발산되는 광속의 양이다
- 광속(Luminous Flux)은 광원으로부터 나오는 모든 빛의 총량을 나타낸다.
- 광원이 발할 때 발생하는 모든 방향의 빛을 합한 값으로 단위는 루멘(lm)을 사용한다.
- LED 전구는 광속의 단위 루멘(lm)을 사용하여 나타낸다.
- 광속은 광원에서 모든 방향으로 방사된 빛의 양을 나타낸다.
- 형광등의 경우 70 lm/W, 백열등은 10 lm/W의 효율을 지니고 있고, LED전구도 모든 방향으로 방사되는 빛의 밝기 「전광속」을 사용해 밝기를 나타내고 있다.



3) 조도(lux)

- 조도(Illuminance)는 일정 면적당 들어오는 광속의 밀도를 의미한다.
- 단위는 렉스(lx)를 사용하며 m²당 광원이 비추어야 할 빛의 양을 의미한다.
- 1 lx = 1 lm/m²
- 20살인 사람을 기준으로, 수예·재봉에는 750~1500lx, 독서나 화장에는 300~750lx의 조도가 필요하다고 한다.(고령자에게는 이것의 약 2배가 필요하다).



4) 휘도

- 빛이 반사되는 반사면의 밝기. 눈부심의 정도이다.
- 휘도(Luminance)는 한 방향에서 본 물체의 밝기이다.
- 조도가 단위 면적 당 얼마만큼의 빛이 도달하는가를 표시한다면 휘도는 어느 방향에서 얼마만큼 밝게 보이는가를 말한다. 단위는 cd/m^2 를 사용하며 nit(니트)라고도 한다.

5) 칸델라, 루멘, 럭스

- 칸델라와 연관이 있는 빛의 단위는 루멘(lm)과 럭스(lx)가 있다. 이 둘도 라틴어로 '빛'을 의미하는 'lumen'과 'lux'에서 이름이 지어진 단위이며, 이 셋의 차이는 다음과 같다.³⁾



3) 표준연 KRISS 공식블로그 <https://m.blog.naver.com/kriisspr/221362056099>

- 먼저 칸델라는 앞서 설명했듯 특정 방향으로의 '빛의 밝기(정확하게 빛의 세기)'를 뜻한다. 예를 들어 거실 정중앙에서 칸델라를 측정하면 동쪽이나 남쪽 같은 특정 방향에 대한 밝기만을 나타낸다. 하지만 빛이 사방으로 퍼진다면 어떨까? 밝기는 같지만 향하는 방향이 늘어났기 때문에 빛의 양은 증가하게 된다. 즉 루멘은 칸델라에 각도에 맞는 스테라디안을 곱한 값이 된다.
- 칸델라와 루멘이 광원을 기준으로 했다면, 렉스는 빛을 받는 물체가 기준이 된다. 즉 단위 면적에 얼마나 빛이 비추고 있는지를 뜻한다. 예를 들어 같은 방안에 백열전구를 설치했을 때와 LED등을 설치했을 때를 생각해보자. 두 방의 면적은 같지만, 백열전구와 LED등은 빛의 밝기(칸델라)가 다르기 때문에 비추는 양(루멘)도 차이가 납니다. 즉 LED등이 켜진 방이 렉스가 더 높다.

11. 방사선량

1) 시버트(Sv)

- 1시버트(Sv)는 에너지1 줄/킬로그램을 흡수했을 때의 생물학적 효과를 말한다.
- 시버트는 신체에 미치는 확률적 영향만 생각하며, 결정론적 영향은 일반적으로 SI 단위 그레이(Gy)로 표시되는 흡수선량 값과 비교된다.
- 치과 방사선 사진 1장을 찍을 때 흡수되는 방사선량은 5~10 μSv (마이크로시버트), 바나나 한 개의 방사선량은 98nSv(나노시버트)이다.

2) 베크렐

- 베크렐[Bq]은 「방사선을 내는 측」의 단위이다. 프랑스의 물리학자 베크렐(1852~1908년)에서 유래했다.
- 1베크렐은 방사성핵종(방사성동위원소)이 1초에 1개 붕괴(괴변)하는 방사능이다. 따라서 어느 방사성물질의 원자가 5초간 200개 붕괴한다면 이 때의 방사능은 40베크렐이 된다. 1 퀴리는 3.7×10^{10} 베크렐이다.

3) 그레이(Gy)

- 방사선이 물질에 맞으면 그 물질에 에너지를 전달한다.
- 1그레이는 물질 1kg 당 1줄의 에너지를 쏘일 때의 흡수선량이다.
- 물질이 흡수한 방사선의 양 「흡수선량」은 그 물체의 단위질량이 흡수한 에너지로 정의된다. 이것을 표시하는 단위의 하나가 그레이이다. 영국의 방사선물리학자 그레이(1905~1965년)

- 에서 유래했다.
- 베크렐(Bq)과 그레이(Gy)는 1975년부터 사용되고 있다.

12. 물질의 양

1) 몰(mol)

- 국제단위계 7번째 기본단위로 물질의 양을 나타낸다.
- 1몰은 약 6.022×10^{23} 이다. 이 수치를 「아보가드로의 수 N_A 」라고 부른다.
- 이 수는 12g의 ^{12}C (질량수 12의 탄소원자) 속에 존재하는 원자의 개수이다.
- 물 분자 H_2O 의 질량수는 18이므로, 18g의 물속에는 1몰의 물 분자가 있다.

2) pH

- pH는 수용액 중의 수소이온의 농도를 사용해서 산성, 염기성의 상태를 나타내는 것이다.
- 1909년, 덴마크의 생화학자, 쇠렌센(1868~1939년)에 의해 고안되었다.
- pH가 7이면 중성, 7보다 작으면 산성, 7보다 크면 염기성이다. 수치가 7에서 멀어질수록, 산성·염기성이 강해진다는 것을 의미한다.
- 수용액 1리터 중에 수소 이온이 얼마나 있는지를 몰[mol](P.192)라는 단위로 나타낸다. 이 수치를 10의 거듭제곱의 형태로 표시하여 지수에서 마이너스 부호를 뺀 수치가 pH이다.
- 예를 들면 1리터 속에 0.0001몰의 수소이온이 있는 경우는 $0.0001\text{mol/L} = 10^{-4}\text{mol/L}$ 이기 때문에 지수는 -4, 따라서 pH는 4, 이것은 약한 산성이다.

모든 학생을 위한

양적추론(Quantitative Reasoning) 프로그램 개발 방안 연구 (1차 연도)



한국대학교육협의회
Korean Council for University Education



한국교양기초교육원
Korea National Institute for General Education